

NOM : Vendredi 22/12/2023

Prénom :

**Terminale STI. Contrôle n° 4**

**Exercice 1 (3 points)**

Compléter sur l'énoncé.

1. Soit, pour tout  $x \neq 0$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ .  
La dérivée de la fonction  $f$  est donnée pour tout  $x \neq 0$  par  $f'(x) = \dots$
2. Pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $\log(a \times b) = \dots$
3. Pour tout  $a > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\log(a^x) = \dots$
4. Donner deux autres propriétés de la fonction  $\log$  (parmi définition, sens de variation, signe, propriétés algébriques, etc.)
  - (a) .....
  - (b) .....

**Exercice 2 (7 points)**

**Partie A**

Le coût de production de  $x$  m<sup>3</sup> de détergent est donné en euros par  $C(x) = x^2 + 60x + 121$  pour  $x \in [1; 30]$ .

On note  $f$  la fonction représentant le coût moyen par m<sup>3</sup>.

1. Montrer que  $f(x) = x + 60 + \frac{121}{x}$ .
2. Calculer  $f'(x)$  et montrer que
 
$$f'(x) = \frac{(x - 11)(x + 11)}{x^2}.$$
3. Déterminer le tableau de variation de  $f$ . Justifier.
4. En déduire pour quelle production le coût moyen est minimal, et préciser le coût moyen minimal.

**Partie B**

Le détergent est vendu 110 euros par m<sup>3</sup>.

1. Exprimer la recette  $R(x)$  en fonction de  $x$ .
2. Montrer que le bénéfice est donné par

$$B(x) = -x^2 + 50x - 121.$$

3. Déterminer les variations de  $B$  sur  $[1; 30]$ .
4. En déduire le bénéfice maximal, et pour quelle production il est atteint.

**Exercice 3 (2 points)**

Exprimer en fonction de  $\log 5$  et de  $\log 3$ .

$$A = \log(5 \times 3) + 7 \log\left(\frac{5}{3}\right) \qquad B = \log(5^3)$$

**Exercice 4 (5 points)**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes.

1.  $3 \times 10^x = 12$
2.  $11 + 2 \log x = 0$
3.  $2^x = 0, 3$
4.  $0, 8^x \leq 5$

**Exercice 5 (3 points)**

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $u_n = 375 \times 1,06^n + 250$ , le terme  $u_n$  représentant le niveau d'eau du lac (en cm) ,  $n$  jours après le 1er janvier 2020.

Lorsque le niveau d'eau dépasse 10 mètres, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage. Calculer la première date d'intervention des techniciens sur les vannes du barrage.