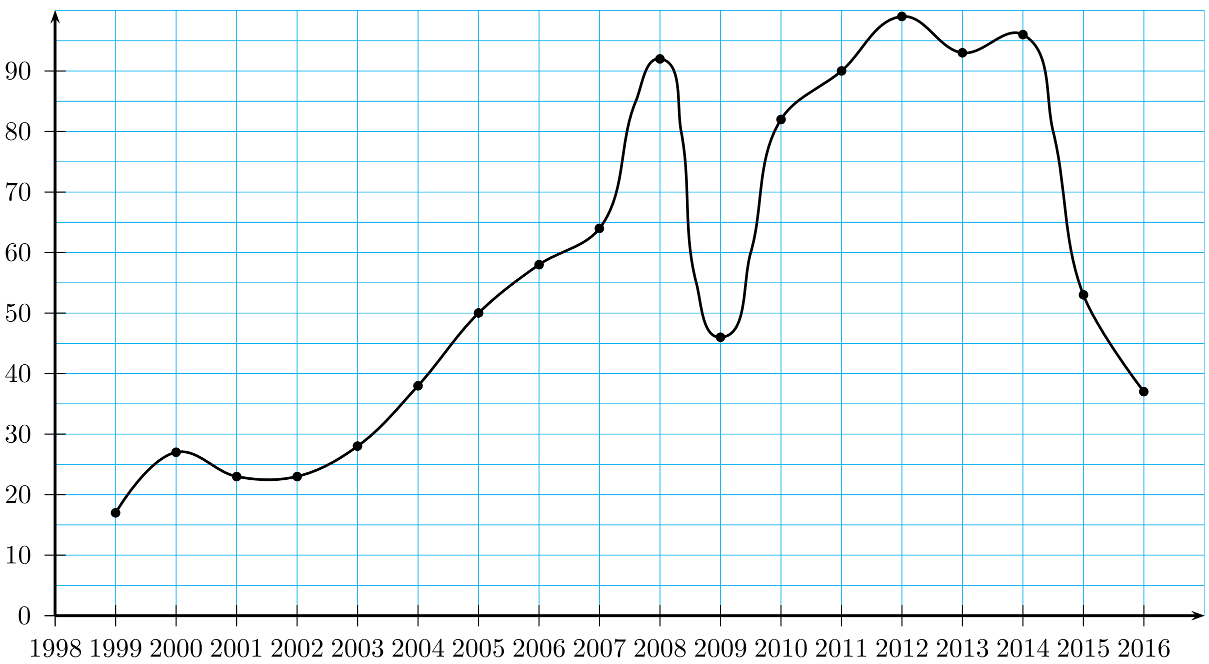
Chapitre 2 : Généralités sur les fonctions. Résolutions graphiques

I Notion de fonction

Le graphique suivant représente l'évolution du prix du baril de pétrole, exprimé en dollars, de début 1999 à début 2016.



1. Combien coûtait approximativement un baril de pétrole au début de l'année 1999 ? Et début 2011 ?

2. D'après le graphique, entre 1999 et 2016, combien de fois le baril de pétrole a-t-il coûté 60 dollars ?

3. D'après le graphique, entre 1999 et 2016, combien de fois le baril de pétrole a-t-il coûté 30 dollars ?

4. Quand le baril de pétrole a-t-il atteint son maximum entre 2002 et 2009 ? Quel était ce maximum ?

5. Comment a évolué le prix du baril de pétrole entre 2002 et 2008 ?

6. Parmi les deux phrases suivantes, une seule est vraie. Laquelle ?
   « À chaque date entre 1999 et 2016, il correspond un unique prix pour le baril de pétrole ».
   « À chaque valeur entre 18 et 99 dollars pour le prix du baril de pétrole, il correspond une unique date entre 1999 et 2016 ».

Vocabulaire :
Le graphique montre que lorsque l'année (le temps) varie, le prix du baril de pétrole évolue.
Le ______________________________ dépend du ____________________.
On dit que le temps est la ____________________.
Sur le graphique, on lit ses valeurs en ____________________.
Le prix du baril de pétrole est ____________________ du temps.
On lit ses valeurs en ____________________.

I.1 Définition

Définition
Soit D une partie de $\mathbb{R}$.
Définir une fonction f de D dans $\mathbb{R}$, c'est associer à tout nombre x appartenant à D un unique nombre réel $f(x)$.
Vocabulaire : On dit que
- x est la variable de f,
- D est l'ensemble de définition de f (souvent noté D_f),
- $f(x)$ est l'image de x par f.

On note parfois $f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Exemple :
Posons $f(x) = 2x^2 - 1$.
L'image de 0 par f est $f(0) = 2 \times 0^2 - 1 = -1$.
Pour calculer l'image d'une nombre par une fonction, on remplace x par ce nombre dans l'expression de f.

Définition
Soit f une fonction définie sur D. Soit y un nombre réel.
On appelle antécédent de y par f tout nombre x de D tel que $f(x) = y$.

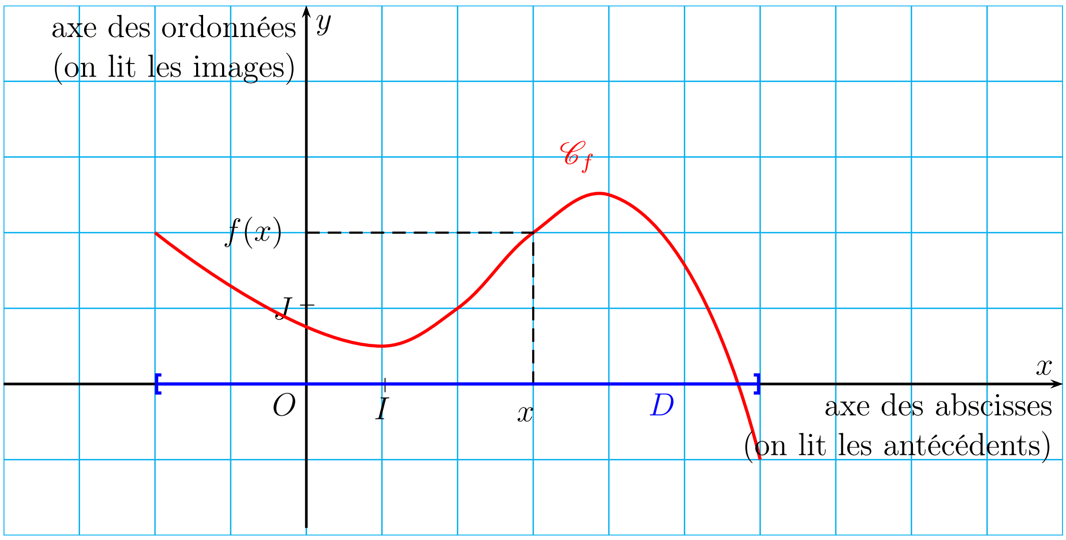
Exemple :
Considérons la fonction carré, $f(x) = x^2$.
- On cherche les antécédents de 9 par f.
  Un antécédent de 9 est un nombre x tel que $f(x) = 9$.
  L'équation $x^2 = 9$ donne $x = 3$ ou $x = -3$.
  Ainsi, le nombre 9 a deux antécédents qui sont 3 et -3.
- Rechercher les antécédents de -2 par f.
  Ce sont les nombres x tels que $x^2 = -2$.
  Cette équation n'a pas de solution (un carré est toujours positif).
  Donc -2 n'a pas d'antécédent par f.

Remarque
Un nombre peut avoir 0 antécédent, ou un antécédent, ou plusieurs !
Par contre, tout nombre x de D admet une unique image $f(x)$.

I.2 Représentation graphique d'une fonction

Pour étudier une fonction f, il est intéressant de pouvoir lire à la fois le nombre x et son image $f(x)$.

Définition
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Dans un repère du plan, la courbe représentative de f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ avec $x \in D_f$.
Autrement dit, $M(x; y) \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $\big(x \in D \text{ et } y = f(x)\big)$.
On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.



Sur cet exemple, l'ensemble de définition de f est $D = [-2; 6]$.
On remarque que la courbe passe par le point $A(3; 2)$, donc $f(3) = 2$.

Remarque
Pour une valeur de la variable x donnée, il n'y a qu'une seule image $f(x)$. Par conséquent la courbe d'une fonction ne peut avoir qu'un point d'abscisse donnée.

Exercice 1 (calcul mental)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 4$.

1. L'image de -1 est ....
   Donc le point de coordonnées $(\ldots;\ldots)$ appartient à la courbe de f.
2. $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ldots.$
3. 10 admet pour antécédent le réel ... car ...
4. La courbe représentative de f passe par $A(0;\ldots)$, $B(2;\ldots)$ et $C(\ldots;-8)$.

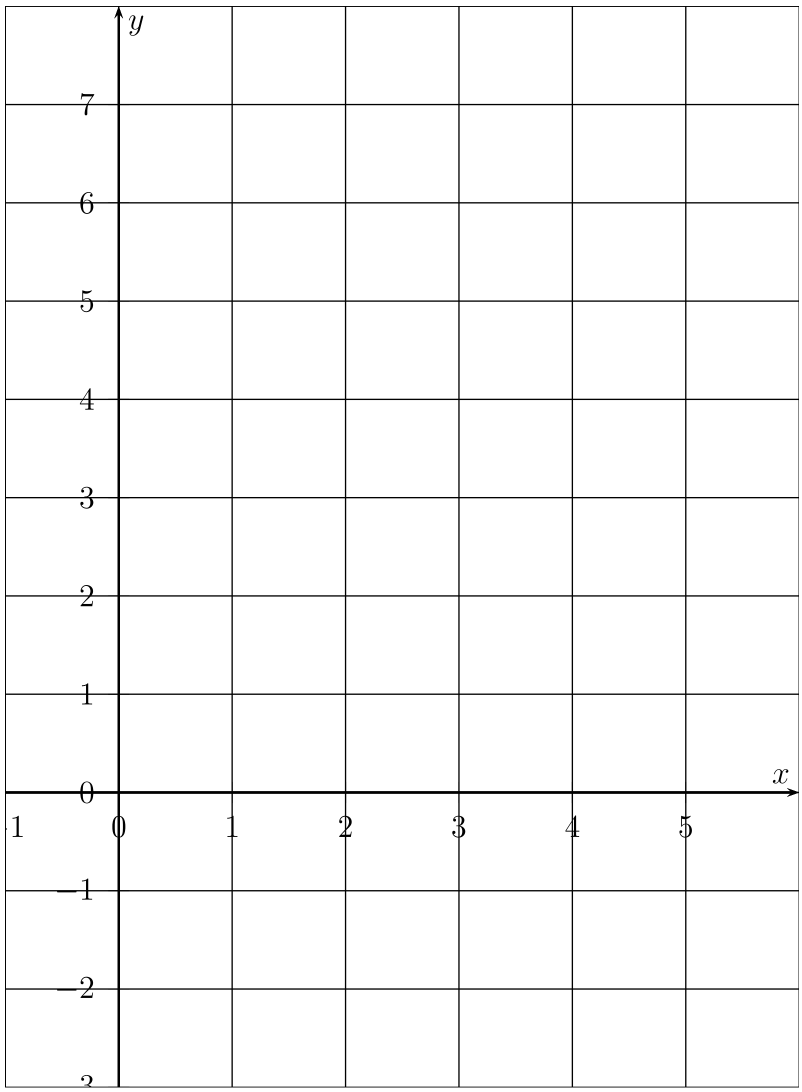
Remarque
Pour tracer la représentation graphique d'une fonction, on commence par placer plusieurs points.
On peut utiliser un tableau de valeurs pour préparer le tracé, éventuellement obtenu à l'aide de la calculatrice.

Exercice 2 (tableau de valeurs, tracé de courbe)
Soit f la fonction définie sur $[0;5]$ par $f(x) = (x-3)^2 - 2$.

1. Tableau de valeurs :
   Compléter le tableau.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$											

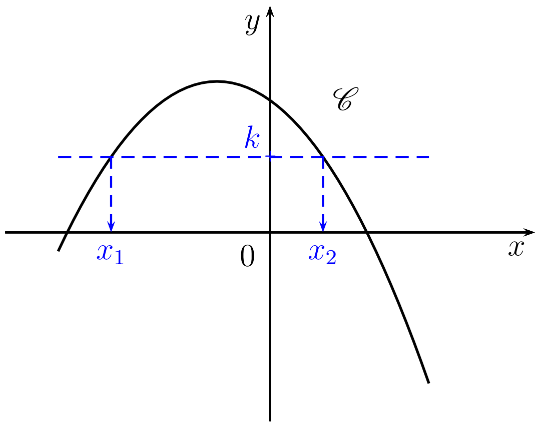
2. Dans un repère orthogonal, construire la courbe représentative de f sur $[0;5]$.



II Résolutions graphiques

II.1 Équation $f(x) = k$

Propriété
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Notons $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Soit k un nombre réel.
Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ qui ont une ordonnée égale à k.

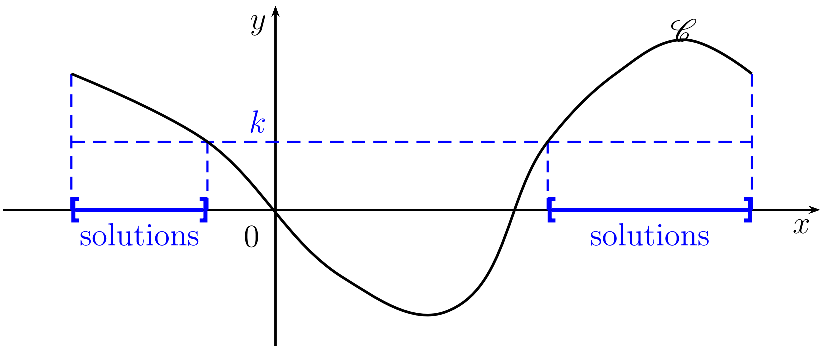


Remarque
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à déterminer graphiquement les antécédents de k par f.

II.2 Inéquation $f(x) \geqslant k$

Propriété
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Notons $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Soit k un nombre réel.
Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant k$ (resp. $f(x) > k$) sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ qui ont une ordonnée supérieure ou égale à k (resp. strictement supérieure à k).

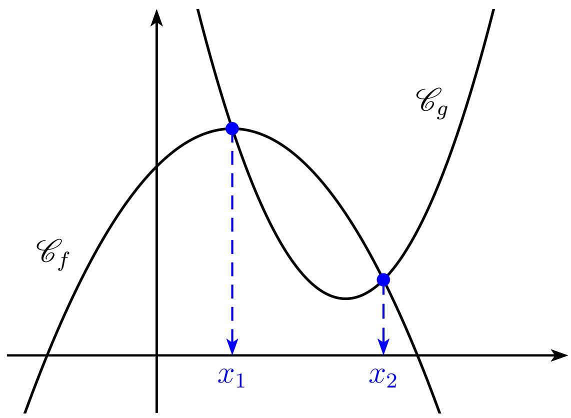
Illustration pour $f(x) \geqslant k$



Remarque
On a des énoncés analogues pour les inéquations $f(x) \leqslant k$ et $f(x) < k$.
L'ensemble solution peut être une réunion d'intervalles.

II.3 Équation $f(x) = g(x)$

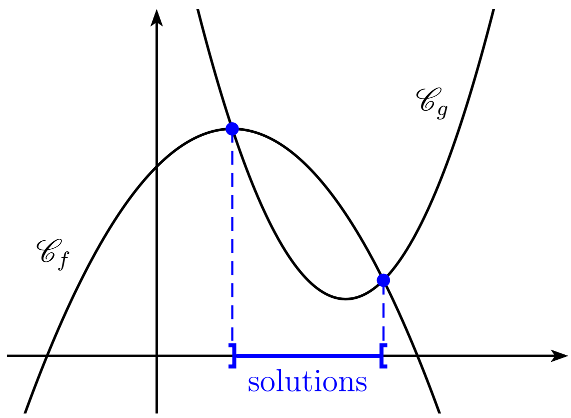
Propriété
Soient f et g deux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Notons respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère du plan.
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



II.4 Inéquation $f(x) > g(x)$

Propriété
Soient f et g deux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Notons respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère du plan.
Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points où $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

Illustration pour l'inéquation $f(x) > g(x)$.



Remarque
Pour l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$, on inclut les abscisses des points d'intersection dans les solutions.