

Chapitre 8 : Applications de la dérivation

I Dérivée et sens de variation

Théorème (fondamental)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. f est croissante sur I ssi f' est positive sur I .
2. f est décroissante sur I ssi f' est négative sur I .
3. f est constante sur I ssi $f' = 0$ sur I .

Remarque

Le signe de la dérivée détermine les variations de la fonction.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 6x + 1$.

Déterminer les variations de f à l'aide de sa dérivée f' .

II Extrema d'une fonction

Définition (extremum global)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .
 f admet un maximum global en a si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$.
 f admet un minimum global en a si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$.

Définition (extremum local)

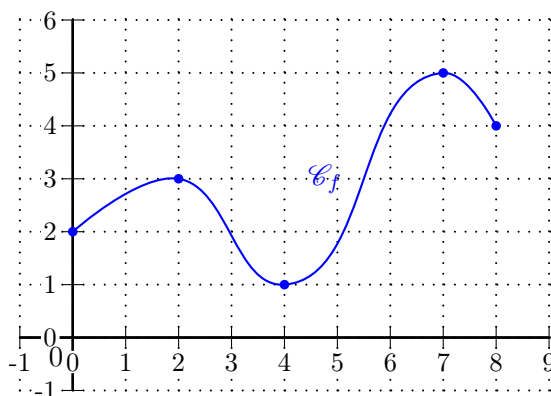
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .
On dit que f admet un maximum local en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que, pour tout x de $J \cap I$, on ait $f(x) \leq f(a)$.

Remarque

1. On définit de façon analogue un minimum local en a .
2. Un extremum est un maximum ou un minimum.
3. Tout extremum global est aussi un extremum local.

Exercice 2

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0; 8]$.
Compléter :



1. f admet un maximum global en Ce maximum global est ...
2. f admet un minimum global en Ce minimum global est ...
3. f admet aussi un maximum local en ... qui est ...
4. Enfin, f admet des minima locaux en ... et en ... qui sont respectivement ... et ...

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , et soit a un réel de I distinct des extrémités.
Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.
Rappel : $f'(a) = 0$ signifie que la tangente en a à \mathcal{C}_f est parallèle à l'axe des abscisses.

Remarque

1. La dérivabilité n'est pas nécessaire pour avoir un extremum.
Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 et admet un minimum (global) en 0.
2. La réciproque du théorème est fautive.
Considérons $f(x) = x^3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.
On a $f'(0) = 0$ et pourtant f n'a pas d'extremum local en 0.
3. Si la dérivée de f s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a .

Exercice 3

Rechercher les extrema de la fonction f définie sur $[-1; 2]$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$.

Exercice 4

Déterminer le meilleur encadrement de $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ sur $[-3; 4]$.

III Compléments

III.1 Variante du théorème fondamental

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. Si $f' > 0$ sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de réels où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
2. Si $f' < 0$ sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de réels où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

Remarque

1. Considérons a fonction cube, définie et dérivable sur \mathbb{R} .
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.
Il est clair que $f' > 0$ sur \mathbb{R} sauf en 0 où $f'(0) = 0$.
Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. L'hypothèse I est un intervalle est indispensable.
 $f(x) = \frac{1}{x}$.

III.2 Équation $f(x) = \lambda$

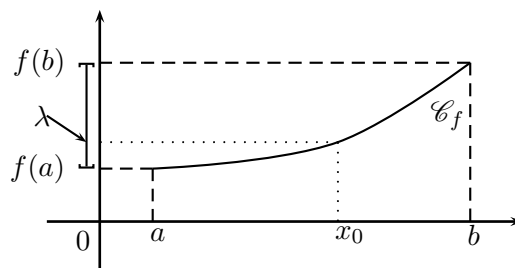
Remarque (Courbe représentative d'une fonction dérivable)

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I , alors,

- f est continue, c'est-à-dire que la courbe de f peut être tracée sans lever le crayon, il n'y a pas de « saut »,
- la courbe de f admet des tangentes en chacun de ses points, et ces tangentes ne sont pas des droites verticales : leur coefficient directeur est un nombre réel (contre-exemple : $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0, où la tangente est verticale),
- la courbe de f est régulière, c'est-à-dire qu'elle ne fait pas d'angle vif (contre-exemple : $x \mapsto |x|$ en 0).

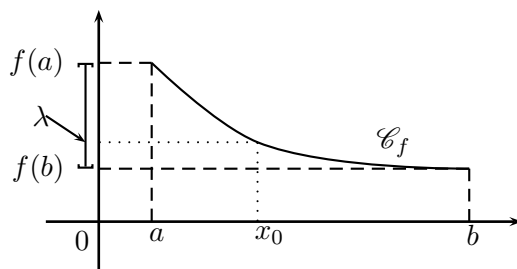
Théorème

Si f est dérivable sur $[a; b]$ et si pour tout $x \in]a; b[$ $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $[a; b]$ et pour tout $\lambda \in [f(a); f(b)]$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution x_0 dans $[a; b]$.



Théorème

Si f est dérivable sur $]a; b[$ et si pour tout $x \in]a; b[$ $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $]a; b[$ et pour tout $\lambda \in]f(b); f(a)[$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution x_0 dans $]a; b[$.



Application : Lorsqu'on est dans les hypothèses de l'un des théorèmes précédents avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a; b[$.

Exercice 5

On cherche à étudier l'équation $x^3 + 3x - 7 = 0$.

Notons $f(x) = x^3 + 3x - 7$.

1. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .
2. En considérant $f(1)$ et $f(2)$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} , et que $\alpha \in [1; 2]$.
3. Utiliser le tableur de la calculatrice pour déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} .