1re G. Correction du devoir n° 5. Sujet 1

Exercice 1 (5 points)

1. Deux réels x et x' ont la même image sur le cercle trigonométrique ssi leur différence est un multiple de 2π.
2. $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$; $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$;
   $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$. $f'(x) = a \times g'(ax+b)$

Exercice 2 (2 points)

Étudier si x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique. Justifier.
x et y ont la même image sur le cercle ssi $x - y$ est un multiple de 2π.

1. $x = -\frac{17\pi}{4}$ et $y = \frac{15\pi}{4}$.
   $x - y = -\frac{17\pi}{4} - \frac{15\pi}{4} = \frac{32\pi}{4} = 8\pi = 4 \times 2\pi$.
   $\boxed{x \text{ et } y \text{ ont la même image sur le cercle.}}$
2. $x = \frac{7\pi}{9}$ et $y = \frac{52\pi}{9}$.
   $x - y = \frac{7\pi}{9} - \frac{52\pi}{9} = -\frac{45\pi}{9} = -5\pi$, qui n'est pas un multiple de 2π (car -5 est impair). $\boxed{x \text{ et } y \text{ n'ont pas la même image sur le cercle.}}$

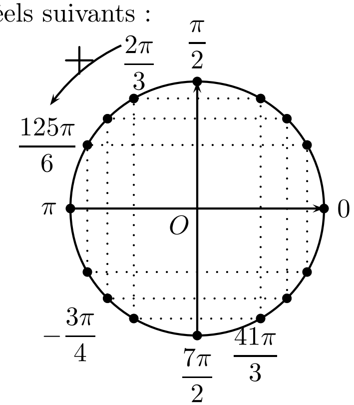
Exercice 3 (4 points)

Placer sur le cercle ci-contre les images des réels suivants :
0 ; π ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$;
$\frac{7\pi}{2}$; $\frac{-3\pi}{4}$; $\frac{41\pi}{3}$; $\frac{125\pi}{6}$. Aucune justification n'est demandée.

$\frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\times 2\pi - \frac{\pi}{2}$, il a la même image que $-\frac{\pi}{2}$.

$\frac{41\pi}{3} = \frac{42\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 7 \times 2\pi - \frac{\pi}{3}$.

$\frac{125\pi}{6} = \frac{120\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 10 \times 2\pi + \frac{5\pi}{6}$



Exercice 4 (3 points)

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^5 + 8x^3 + 2x - 4$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -5x^4 + 24x^2 + 2.}$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x-6)^3$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 5 \times 3(5x-6)^2 = 15(5x-6)^2.}$

Exercice 5 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]-4; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{x+4}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Vérifier que $f'(x) = \frac{12}{(x+4)^2}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x > -4,\ f'(x) = \frac{3(x+4) - 3x}{(x+4)^2} = \frac{12}{(x+4)^2}.}$
2. Justifier que la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 a pour équation $y = 3x + 3$.
   $f(-2) = \frac{3 \times -2}{-2+4} = -3$. $f'(-2) = \frac{12}{(-2+4)^2} = 3$.
   $y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2) = 3(x+2) - 3 = 3x + 3$.
   $\boxed{T \text{ a pour équation } y = 3x + 3.}$
3. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de T.
   On étudie le signe de $f(x) - (x+3)$.
   $f(x) - (3x+3) = \frac{3x}{x+4} - \frac{(3x+3)(x+4)}{x+4} = \frac{3x - 3x^2 - 15x - 12}{x+4}$
   $f(x) - (3x+3) = \frac{-3x^2 - 12x - 12}{x+4} = \frac{-3(x^2+4x+4)}{x+4} = \frac{-3(x+2)^2}{x+4}$.
   Sur $]-4; +\infty[$, $x + 4 > 0$.
   Comme un carré est toujours positif et $-3 < 0$, $-3(x+2)^2 \leqslant 0$.
   Donc, pour tout $x > -4$, $f(x) - (3x+3) \leqslant 0$.
   $\boxed{\mathscr{C} \text{ est toujours en dessous de } T \text{ sur }]-4; +\infty[\text{ (avec un point de contact à l'abscisse } -2\text{).}}$
4. Soit (d) la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + 5$.
   Montrer que $\mathscr{C}$ admet une unique tangente T' parallèle à (d), et préciser les coordonnées du point de contact de $\mathscr{C}$ avec T'.
   $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a, et $T_a // (d)$ ssi elles ont le même coefficient directeur : $\frac{1}{3}$.
   On résout donc l'équation $f'(x) = \frac{1}{3}$.
   $\frac{12}{(x+4)^2} = \frac{1}{3}$, donc $(x+4)^2 = 36$, puis ($x + 4 = 6$ ou $x + 4 = -6$), soit $x = 2$ ou $x = -10$).
   Comme on se limite à l'intervalle $]-4; +\infty[$, on ne retient que la solution $x = 2$.
   $f(2) = \frac{3 \times 2}{2+4} = 1$.
   $\boxed{\text{Sur }]-4; +\infty[, \text{ il existe une seule tangente } T' \text{ qui soit parallèle à } (d). \text{ C'est la tangente au point } A(2; 1).}$