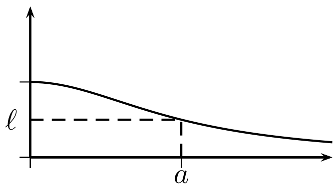
Chapitre 6 : Dérivation.

Première partie

I Notion de limite en un réel a

Définition
Soient f une fonction, et a un nombre réel appartenant à D_f ou se trouvant au bord de D_f. On dit que le nombre ℓ est limite de f en a si toutes les valeurs de $f(x)$ deviennent très proches de ℓ dès que x est très proche de a. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.



Théorème (admis)

1. Lorsque f est une fonction usuelle (polynôme, fraction rationnelle, fonction trigonométrique, ...) et que f est définie en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. Si f n'est pas définie en a, mais qu'il existe une fonction usuelle [a] g définie en a et telle que pour tout $x \neq a$, $f(x) = g(x)$, alors f admet une limite en a qui vaut $g(a)$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = g(a)$$

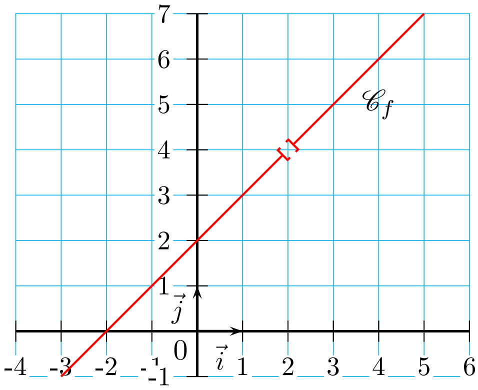
a. La fonction g doit être continue. La notion de continuité n'est pas au programme de première. Les fonctions rencontrées en première sont presque toutes continues sur leur ensemble de définition.

Exemples :

1. $f(x) = x^3 - 1$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2^3 - 1 = 7$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. f n'est pas définie en 2.

   Mais pour $x \neq 2$, $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$.

   Ici, $g : x \mapsto x + 2$ est définie en 2, et donc $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = g(2) = 2 + 2 = 4$.



II Nombre dérivé

II.1 Définition

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant le nombre réel a.
Soit h un réel non nul.
Si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite réelle lorsque h tend vers 0, on dit que f est dérivable en a et cette limite est appelée le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Définition équivalente :
En notant $x = a+h$, alors, $h = x-a$, et $h \to 0$ équivaut à $x \to a$.
L'énoncé devient :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Exemple :
Montrer que pour tout nombre réel a, la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en a. Calculer $f'(a)$.
Soient $a \in \mathbb{R}$, et $h \neq 0$.
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \dfrac{2ah+h^2}{h} = 2a+h.$
On a le droit de simplifier par h car $h \neq 0$.
Il vient donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a$.
Pour tout nombre réel a, f est dérivable en a, et $f'(a) = 2a$.

II.2 Conséquence graphique : la tangente

Définition (et théorème)
Soit f une fonction dérivable en a.
La tangente à la courbe de f en a est la droite qui passe par le point de coordonnées $(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Une équation de Δ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

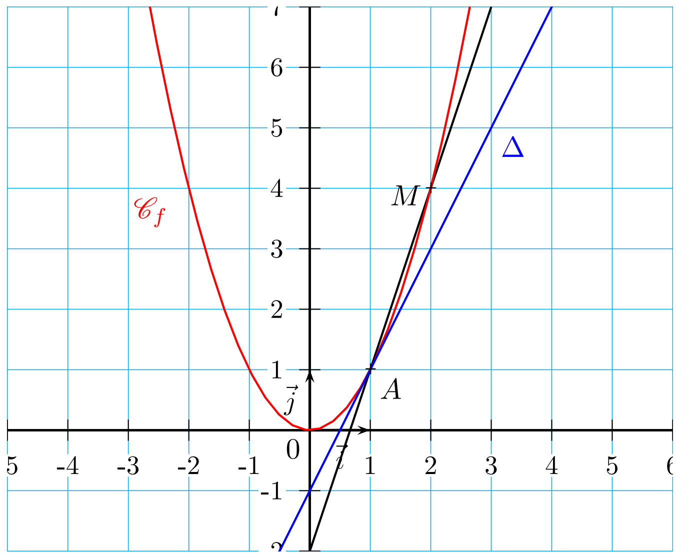
Remarque
Le nombre dérivé $f'(a)$ s'interprète graphiquement comme étant le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisses a.
Dans l'équation précédente, on vérifie facilement que le point de coordonnées $(a; f(a))$ appartient à la droite.

Exemple :
On considère la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Cherchons une équation de la tangente Δ à la courbe de la fonction carrée en 1.
C'est la droite qui passe par le point $A(1; f(1))$, c'est-à-dire $A(1; 1)$, et de coefficient

directeur $f'(1)$.
Comme on a vu que $f'(a) = 2a$, on en tire $f'(1) = 2 \times 1 = 2$.
On applique la formule précédente :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1.$$

La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1 est la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.



Interprétation graphique de la définition du nombre dérivé.
Soient $a \in I$, $h \neq 0$. On pose $x = a + h$.
On note $A(a; f(a))$, $M(x; f(x))$.
Le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le coefficient directeur de la sécante (AM).
Lorsque h tend vers 0 (ou x tend vers a), la droite (AM) devient la tangente à la courbe de f en A, et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le coefficient directeur de la tangente en A.

On retiendra que le nombre dérivé en a est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.

Exercice 1
Lire graphiquement un nombre dérivé (la courbe de la fonction et la tangente sont tracées) :
ressource 52

III Fonction dérivée

Définition
Soit f un fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel de I, c'est-à-dire si pour tout $x \in I$, $f'(x)$ existe. Alors la fonction dérivée de f est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

Exemple :
Ainsi, d'après l'exemple en **??**, la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 2x$.

III.1 Dérivée des fonctions usuelles

Théorème (à connaître par ♡)

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle de validité
$f(x) = c$ (fonction constante) $f(x) = x$ $f(x) = ax + b$	$f'(x) = 0$ $f'(x) = 1$ $f'(x) = a$	$I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$ $f(x) = x^3$ $f(x) = x^n$, $n \geqslant 1$	$f'(x) = 2x$ $f'(x) = 3x^2$ $f(x) = nx^{n-1}$	$I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, $n \leqslant -1$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = nx^{n-1}$ $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$I =]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ $I =]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$I =]0; +\infty[$

Exemples :
$f(x) = x^5$, $f'(x) = 5x^4$.
$g(x) = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$. $g'(x) = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$.

Démonstration

1. Fonctions constantes. C'est évident puisque le nombre dérivé décrit la pente de la tangente.
2. Fonctions affines. Même argument.
3. $x \mapsto x^n$ On admet la démonstration.
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Soit a un nombre réel non nul, et $h \neq 0$.

   $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \dfrac{\dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \dfrac{\dfrac{-h}{a(a+h)}}{h} = \dfrac{-h}{a(a+h)} \times \dfrac{1}{h} = -\dfrac{1}{a(a+h)}$.

   Il apparaît donc que

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

   Donc f est dérivable sur tout intervalle ne contenant pas 0 et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

5. Fonction racine carrée, $f(x) = \sqrt{x}$. Soit $a > 0$ et $h \neq 0$.

   $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \times \dfrac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$

   $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \dfrac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$.

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

III.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème
Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. Somme de fonctions.
   La fonction $(u+v)$ est dérivable sur I et $(u+v)'=u'+v'$.
2. Produit par un nombre réel.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction (λu) est dérivable sur I et $(\lambda u)'=\lambda u'$.
3. Produit de fonctions.
   La fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u\times v)'=u'v+uv'$.
4. Inverse et quotient.
   Si v ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire $\forall x \in I$, $v(x)\neq 0$), alors
   — la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}.$$
   — la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Exercice 2
Dériver les fonctions suivantes :

1. $f(x)=3x-5x^4$
2. $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$
3. $i(x)=x\sqrt{x}$
4. $j(x)=\dfrac{1}{3x^2}$
5. $k(x)=\dfrac{3-x}{x}$

Remarque
Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3
Justifier que la fonction $f(x)=\dfrac{x^2-6x+1}{x-3}$ est dérivable sur son domaine de définition.
Le résultat peut se généraliser.

Remarque
Toute fonction fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) est dérivable sur son ensemble de définition.

Démonstration

1. $(u+v)'=u'+v'$:
   $\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}+\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$.
   Donc $(u+v)'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=u'(a)+v'(a)$.

2. $(\lambda u)' = \lambda u'$:
$\dfrac{(\lambda u)(a+h) - (\lambda u)(a)}{h} = \dfrac{\lambda u(a+h) - \lambda u(a)}{h} = \lambda \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$.
Donc $(\lambda u)'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(\lambda u)(a+h) - (\lambda u)(a)}{h} = \lambda u'(a)$.
3. $(u \times v)' = u'v + uv'$
$\dfrac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$
$= \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + u(a) \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$.
On admet le résultats suivant, vu en terminale : toute fonction dérivable en a est continue en a.
On a alors $\lim\limits_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$.
Ainsi,
$$\lim_{h \to 0} \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$
D'où la formule $(uv)' = u'v + uv'$.
4. $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.
$\dfrac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = -\dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \dfrac{1}{v(a+h)v(a)}$.
En passant à la limite lorsque h tend vers 0,
$\left(\dfrac{1}{v}\right)'(a) = -v'(a) \times \dfrac{1}{[v(a)]^2} = -\dfrac{v'}{v^2}(a)$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
idée : $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$ et utiliser la formule qui permet de dériver un produit.

Exercice 4
Calculs de dérivées :

1. dérivée d'un monôme : ressource 30
2. dérivée de $u + v$: ressource 1586
3. dérivée d'un polynôme : ressource 31
4. dérivée de $\dfrac{1}{v}$: ressource 32
5. Dérivée de $\dfrac{u}{v}$: ressource 1963
6. Dérivée de $\dfrac{u}{v}$ (plus difficile) : ressource 1966