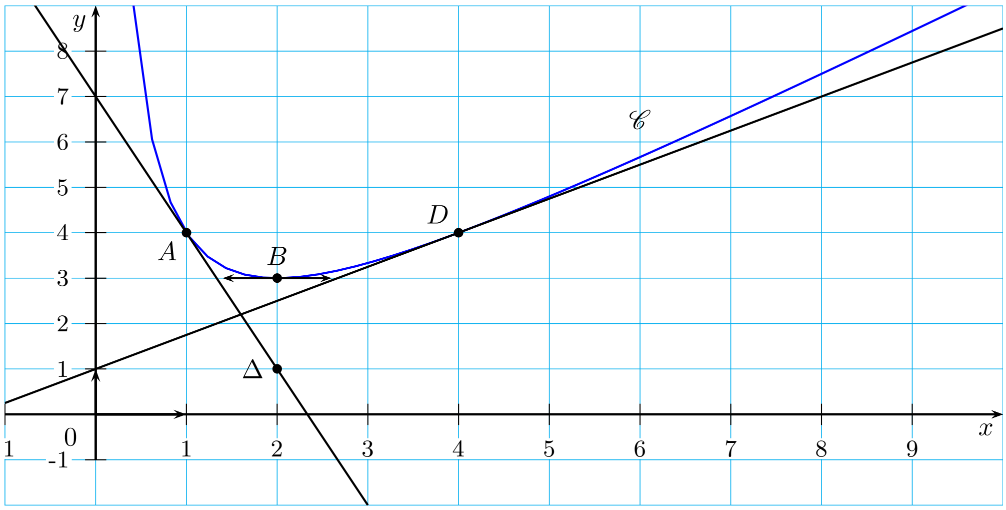
Correction du contrôle de mathématiques n° 2

Exercice 1 (2 points)
En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2+3x$ est dérivable en 5, et déterminer $f'(5)$.
On calcule le taux d'accroissement entre 5 et $5+h$:
$T(h) = \dfrac{f(5+h)-f(5}{h} = \dfrac{-(5+h)^2+3(5+h)-(-25-3\times 5)}{h}$
$T(h) = \dfrac{-(25+10h+h^2)+15+3h+10}{h} = \dfrac{-7h-h^2}{h} = -7-h$

$\lim\limits_{h\to 0} T(h) = \lim\limits_{h\to 0} -7-h = -7$, donc f est dérivable en 5 et $f'(5) = -7$.

Exercice 2 (3,5 points)
Le graphique ci-dessous donne la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.
La droite Δ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
La tangente au point B à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Lire graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f(2)$.
   $f(1)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 1. $\boxed{\text{Donc } f(1) = 4.}$
   De même, $\boxed{f(2) = 3.}$
2. Déterminer à l'aide du graphique, mais en justifiant, les valeurs de $f'(1)$ et $f'(2)$.
   $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1, donc au point A.
   Cette tangente est la droite Δ, passant par $A(1;4)$ et $C(2;1)$.
   Elle a une équation de la forme $y = mx+p$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \\ &= \frac{1-4}{2-1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

   Donc $f'(1) = -3$.
   $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point B (d'abscisse 2).
   Comme cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses, son coefficient directeur est nul. Donc $f'(2) = 0$.
   $\boxed{f'(1) = -3 \text{ et } f'(2) = 0.}$
3. On admet désormais que pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$.
   Vérifier que $f'(4) = \dfrac{3}{4}$ et tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4.

$f'(4) = 1 - \dfrac{4}{4^2} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.
La tangente T_4 passe par le point de la courbe d'abscisse 4, soit $D(4;4)$ et a pour coefficient directeur $f'(4) = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 3 (1,5 point)
La tangente à la courbe de la fonction carré au point $A(2;4)$ passe-t-elle par le point $K(-1;-8)$? Justifier.
On pose $f(x) = x^2$.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.
$f(2) = 2^2 = 4$, et $f'(2) = 2 \times 2 = 4$.
La tangente T_2 à la courbe a pour équation réduite :
$y = f'(2)(x-2) + f(2) = 4(x-2) + 4 = 4x - 4$.
On teste les coordonnées de K dans l'équation de la tangente.
$4x_K - 4 = 4 \times (-1) - 4 = -8 = y_K$.

$\boxed{\text{Donc la tangente } T_2 \text{ passe effectivement par le point } K(-1;-8).}$

Exercice 4 (4 points)
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{1-2n}{n+5}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   $u_{n+1} = \dfrac{1-2(n+1)}{(n+1)+5} = \dfrac{-2n-1}{n+6}$, donc
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-1-2n}{n+6} - \dfrac{1-2n}{n+5} = \dfrac{(-2n-1)(n+5) - (1-2n)(n+6)}{(n+6)(n+5)}$
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(-2n^2 - 10n - n - 5) - (n + 6 - 2n^2 - 12n)}{(n+6)(n+5)} = \dfrac{-2n^2 - 11n - 5 - n + 2n^2 - 6 + 12n}{(n+6)(n+5)}$
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-11}{(n+6)(n+5)}$
   Puisque $n \geqslant 0$, $(n+6)(n+5) > 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite u est décroissante.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n + 2 = \dfrac{11}{n+5}$.
   $u_n + 2 = \dfrac{1-2n}{n+5} + 2 = \dfrac{1 - 2n + 2n + 10}{n+5} = \dfrac{11}{n+5}$.
3. En déduire que (u_n) est bornée et donner un encadrement de u_n valable pour tout entier n.
   $\dfrac{11}{n+5}$ est positif donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n + 2 > 0$, soit $u_n > -2$.
   La suite (u_n) est décroissante donc majorée par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{5}$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-2 < u_n \leqslant \dfrac{1}{5}$. La suite est minorée et majorée donc elle est bornée.

Exercice 5 (4 points)
On considère la suite (A_n) définie par $A_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$A_{n+1} = \frac{1}{3}A_n + 4.$$

1. Calculer A_1 et A_2 (rédiger les calculs).
   $A_1 = \dfrac{1}{3}A_0 + 4 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{12}{3} = \dfrac{13}{3}$.
   $A_2 = \dfrac{1}{3}A_1 + 4 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{13}{3} + 4 = \dfrac{13}{9} + \dfrac{36}{9} = \dfrac{49}{9}$.
2. Compléter l'algorithme de calcul de A_n pour un entier $n \geqslant 1$ donné en entrée.

```
DEBUT
Entrer N
A prend la valeur 1
Pour K allant de 1 à N
A prend la valeur 1/3 × A + 4
Fin Pour
Afficher A
FIN
```

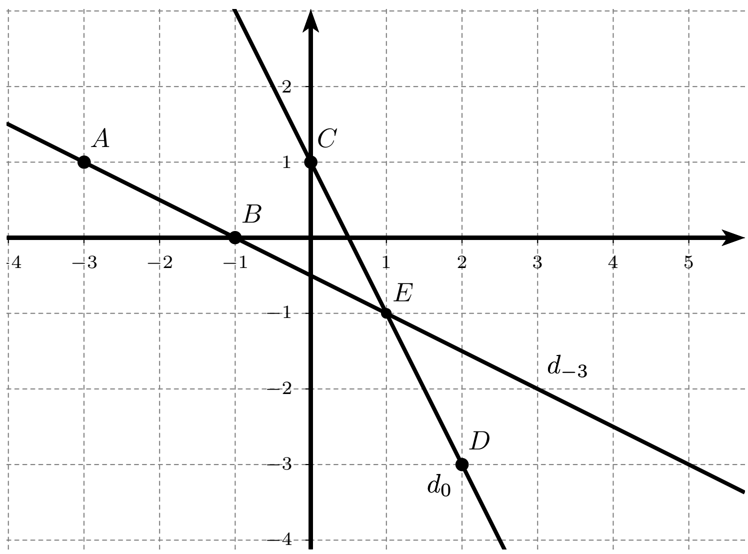
3. Utiliser la calculatrice pour donner une valeur approchée de A_8. Arrondir à 10^{-4} près.
   $\boxed{A_8 \approx 5,9992.}$
4. On admet que la suite (A_n) est croissante et converge vers 6.
   (a) Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que $6 - A_{n_0} < 10^{-7}$.

   DEBUT
   N `prend la valeur 0`
   A `prend la valeur 1`
   `Tant que` $6 - A \geqslant 10^{-7}$
   N `prend la valeur` $N + 1$
   A `prend la valeur` $\frac{1}{3}A + 4$
   `Fin Tant que`
   `Afficher` N
   FIN

   (b) Programmer l'algorithme à la calculatrice et indiquer la valeur de n_0.
   $\boxed{\text{On trouve } n_0 = 17.}$

Exercice 6 (5 points +1 bonus)

1. Déterminer une équation de la droite passant par $A(-3;1)$ et $B(-1;0)$, et tracer la droite (AB).
   $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-1}{-1+3} = -\dfrac{1}{2}$.
   (AB) a une équation réduite de la forme $y = -\dfrac{1}{2}x + p$.
   Comme $A(-3;1) \in (AB)$, on a $1 = -\dfrac{1}{2} \times (-3) + p$, soit $p = -\dfrac{1}{2}$.
   $\boxed{\text{Donc } (AB) \text{ a pour équation } y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}.}$



2. Pour tout réel m, on appelle d_m la droite d'équation $(m+2)x + (m+1)y - 1 = 0$.
   (a) Donner l'équation réduite de d_0 et tracer d_0 sur le même graphique.
   Pour $m = 0$, l'équation devient $2x + y - 1 = 0$, soit $y = -2x + 1$.

x	0	2
y	1	-3

   $\boxed{\text{Donc } d_0 \text{ est la droite d'équation } y = -2x + 1 \text{ passant par } C(0;1) \text{ et } D(2;-3).}$

   (b) Vérifier que la droite (AB) est d_{-3}.
   Avec $m = -3$, on obtient $-x - 2y - 1 = 0$, soit $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.
   On retrouve l'équation réduite de la droite (AB). $\boxed{\text{Donc } d_{-3} \text{ est la droite } (AB).}$

   (c) Donner, en fonction de m, les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite d_m.
   $\boxed{d_m \text{ est dirigée par le vecteur } \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -m-1 \\ m+2 \end{pmatrix}.}$

(d) Déterminer les réels m pour lesquels d_m est parallèle à l'axe des ordonnées.
d_m est parallèle à l'axe des ordonnées ssi $(m+1) = 0$, ssi $m = -1$.

(e) **Bonus**
Montrer que toutes les droites d_m passent par un même point E dont on déterminera les coordonnées.
On observe graphiquement que d_0 et d_{-3} se coupent au point $E(1;-1)$.
Il suffit de vérifier que quelle que soit la valeur de m, le point E appartient à d_m.
$(m+2) \times 1 + (m+1) \times (-1) - 1 = m + 2 - m - 1 - 1 = 0$.
$\boxed{\text{Donc toutes les droites } d_m \text{ passent par le point } E(1;-1).}$

Exercice 7 (bonus, 1 point)
Montrer que la courbe de la fonction inverse admet en deux points une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x + 3$ et préciser les abscisses de ces deux points.
La tangente est parallèle à cette droite si elle a le même coefficient diecteur $-\dfrac{1}{4}$.
Or, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a est $f'(a)$.
On résout $f'(x) = \dfrac{-1}{4}$.
f est dérivable en tout réel $x \neq 0$, et pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.
Donc $\dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{-1}{4}$, $x^2 = 4$, et donc ($x = -2$ ou $x = 2$).
La courbe de la fonction inverse admet des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x + 3$ aux points d'abscisses -2 et 2.