# Chapitre 7 : Produit scalaire dans le plan

Rappel :
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $||\overrightarrow{AB}||$, est la distance $AB$.

## I Définition

**Définition**
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ et on note $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ le nombre réel défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$$

Lorsque $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, on pose $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

**Exercice 1**
Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ dans chacun des cas suivants :

1. on donne $||\overrightarrow{u}|| = 7$, $||\overrightarrow{v}|| = 4$ et $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{4}$.
2. on donne $||\overrightarrow{u}|| = 3$, $||\overrightarrow{v}|| = 8$ et $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \frac{5\pi}{6}$.

**Remarque**
1. Avec cette définition, comme $\cos(-x) = \cos(x)$, on montre facilement la symétrie du produit scalaire :
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$
2. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{u}||^2$.

**Remarque**
Comme $\cos(-x) = \cos(x)$, on peut utiliser la mesure d'un angle géométrique à la place de celle de l'angle orienté correspondant dans la formule du cosinus.

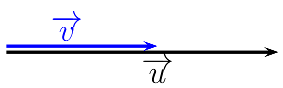
**Propriété**
Pour tous points $A$, $B$ et $C$ deux à deux distincts,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$$

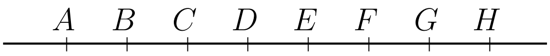
**Exercice 2**
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1. $ABC$ est un triangle équilatéral de côté 6 cm.
2. $ABC$ est un triangle rectangle isocèle en $A$, avec $AB = AC = 2$ cm.

**Remarque (vecteurs colinéaires)**
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls.
— Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$.
— Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraires, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$.




**Exercice 3 (2 points)**
Les points $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ sont placés régulièrement sur une droite. On donne $AB = 1$.




Déterminer les produits scalaires suivants. Justifier.

1. $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CG} =$ ..............................................................
2. $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EB} =$ ..............................................................

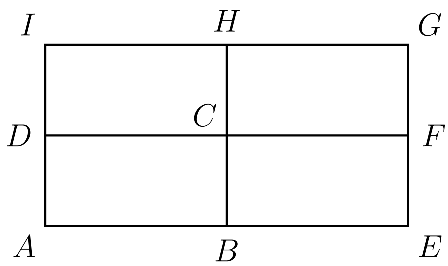
**Remarque**
Le produit $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est parfois noté $\vec{u}\,^2$. On a donc $\vec{u}\,^2 = \|\vec{u}\|^2$.

**Définition (cas général)**
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ des vecteurs non nuls, et $\vec{v}\,'$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

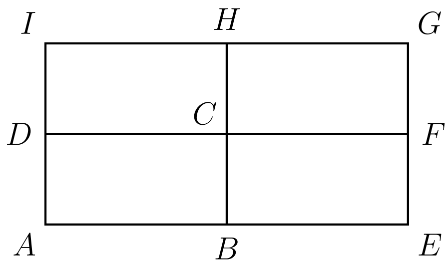
Lorsque $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.


**Exercice 4**
Compléter avec un vecteur.




1. Le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{AG}$ sur la droite $(AB)$ est ...
2. Le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{FH}$ sur la droite $(AB)$ est ...
3. Le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{ED}$ sur la droite $(AB)$ est ...
4. Le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{DH}$ sur la droite $(AD)$ est ...
5. Le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{CF}$ sur la droite $(AD)$ est ...
6. Le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{BG}$ sur la droite $(AD)$ est ...

**Exercice 5**
Dans la figure suivante, on donne $AB = BE = 6$, et $AD = DI = 3$.
Calculer les produits scalaires à l'aide du projeté orthogonal.




1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} =$ ..................................................................
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FH} =$ ..................................................................
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} =$ ..................................................................
4. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DH} =$ ..................................................................
5. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CF} =$ ..................................................................
6. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG} =$ ..................................................................

# II Autres expressions du produit scalaire

## II.1 Expression en repère orthonormé

**Théorème (Expression dans un repère orthonormé)**
Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de coordonnées $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

**Conséquence (lien entre distance et produit scalaire)**
1. $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^{\,2} = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$. D'où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Distance entre deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ :
   Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.
   On retrouve la formule de la distance entre deux points vue en seconde.

$$||\overrightarrow{AB}|| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**Exercice 6**
Dans un repère orthonormé, on donne les points $E(1; -4)$, $F(5; 3)$, et $G(-2; -5)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = -19$.
2. Calculer $EF$ et $EG$.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{FEG})$, puis la mesure de l'angle $\widehat{FEG}$ arrondie à un degré près.

## II.2 Expressions avec les normes

**Théorème (Expressions à l'aide des normes)**
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

# III Propriétés du produit scalaire

**Propriété**
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs quelconques, et $k$ un nombre réel.

1. Symétrie.
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$$
2. Linéarité (et même bilinéarité avec la symétrie).
   - $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$.
   - $(k\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v}=k\times(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u}\cdot(k\overrightarrow{v})=k\times(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$.

Ces deux derniers points traduisent la bilinéarité du produit scalaire.
On notera l'analogie avec les règles de calcul sur le produit des nombres réels.

**Définition (Vecteurs orthogonaux)**
Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$.
Le vecteur nul est considéré orthogonal à tout vecteur.

**Propriété**
Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

**Remarque**
L'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ se traduit de façon analytique par :

$$\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}\quad\Leftrightarrow\quad xx'+yy'=0$$

**Propriété (Identités remarquables)**
1. $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$
2. $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$
3. $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$

**Remarque**
On reconnaît dans les deux premières identités les expressions du produit scalaire avec les normes, il suffit d'isoler $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ pour s'en convaincre.