

BTS – Variables aléatoires discrètes. Loi binomiale.

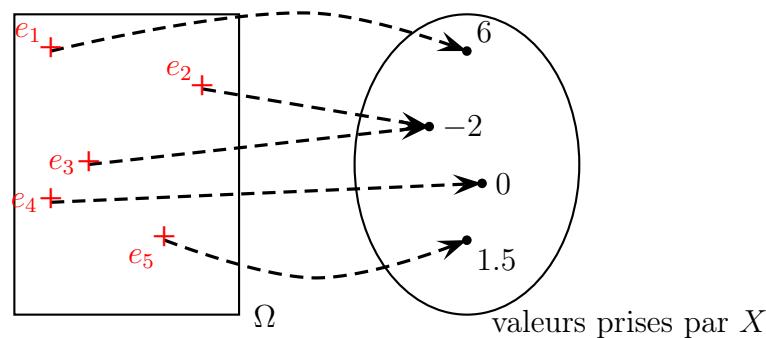
I Variable aléatoire

Définition (Variable aléatoire)

Soit $\Omega = \{e_1, \dots, e_n\}$ un univers fini composé de n issues notées $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Une variable aléatoire X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Définir une variable aléatoire X revient donc à associer à chaque issue e_i un nombre réel x_i .



Définition (Loi de probabilité de X)

On définit la loi de probabilité de la variable aléatoire X lorsque l'on associe sa probabilité à chacune des valeurs prises par X . On la présente souvent sous la forme d'un tableau.

x_i	x_1	$\dots$	x_k
$P(X = x_i)$	p_1	$\dots$	p_k

Remarque

Pour la suite on notera $\{x_1; x_2; \dots; x_k\}$ l'ensemble des valeurs prises par X , et on notera $p_i = P(X = x_i)$.

On a toujours $\sum_{i=1}^k p_i = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_k) = 1$.

Exercice 1

On propose le jeu suivant : La mise est de 5 euros. On lance un dé cubique équilibré.

Si l'on obtient un nombre pair, on perd sa mise.

Sinon, on récupère le triple du nombre indiqué sur le dé.

On note X le gain algébrique (positif ou négatif) du joueur.

1. Déterminer les valeurs possibles de X .
2. Quelles sont les issues qui réalisent l'évènement $X = -5$?
3. Déterminer la loi de la variable X .

Définition (Espérance)

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.
L'espérance de X , notée $E(X)$, est le nombre réel défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k$$

Remarque

L'espérance d'une variable aléatoire s'interprète comme la valeur moyenne prise par X lorsque l'on répète un très grand nombre de fois l'expérience.

Remarque

Lorsque X est une variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur, l'espérance $E(X)$ correspond au gain moyen par partie que le joueur obtiendrait sur un très grand nombre de parties.

- $E(X) > 0$ signifie que le jeu est intéressant pour le joueur ;
- $E(X) = 0$ ssi le jeu est équitable ;
- $E(X) < 0$ signifie que le jeu n'est pas intéressant pour le joueur.

Exercice 2

Déterminer l'espérance de X de l'exercice précédent. Le jeu est-il équitable ?

Définition (Variance et écart type)

La variance de X , notée $V(X)$, est définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 p_i$$

L'écart-type de la variable X est noté $\sigma(X)$ et a pour valeur $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque

L'écart-type est un indicateur de la dispersion des valeurs de X par rapport à l'espérance.

Propriété

Soient X une variable aléatoire, et a, b deux réels.

1. $E(aX + b) = aE(X) + b$
2. $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

II Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition (épreuve de Bernoulli)

Une épreuve de Bernoulli est une expérience qui n'a que deux issues : l'une appelée succès et notée S , l'autre appelée échec et notée $\bar{S}$. Son paramètre est le nombre $p = P(S)$.

Définition (schéma de Bernoulli)

Soient n un entier naturel non nul, et $p \in [0; 1]$.

On appelle schéma de Bernoulli de paramètres n et p la répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

II.1 Loi binomiale**Définition**

La loi binomiale de paramètres n et p , notée $B(n, p)$, est la loi de la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p .

Remarque

Si X suit la loi binomiale $B(n, p)$, alors les valeurs possibles de X sont $0; 1; 2; \dots; n$.

Remarque

On a 3 conditions à vérifier pour justifier que X suit une loi binomiale :

- On répète n épreuves de Bernoulli (2 issues).
- Elles sont toutes identiques (même paramètre p pour le succès) et indépendantes.
- La variable X compte le nombre de succès.

Exercice 3

Un archer tire successivement 3 flèches. À chaque tir, la probabilité qu'il touche sa cible (S) est de 0.9.

1. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.
2. On appelle X la variable aléatoire qui correspond au nombre de tirs qui touchent la cible (nombre de succès).
 - (a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
 - (b) On note $SS\bar{S}$ l'issue correspondant à deux succès suivis d'un échec. Calculer $P(SS\bar{S})$.
 - (c) Calculer $P(X = 2)$.

Théorème (Expression de la loi binomiale)

Soit X une variable suivant la loi binomiale $B(n, p)$.

Pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

où $\binom{n}{k}$, appelé coefficient binomial " k parmi n " est le nombre de chemins réalisant exactement k succès parmi les n épreuves de Bernoulli.

Exercice 4

L'archer qui touche la cible avec une probabilité 0,9 tire 3 flèches. La variable X qui compte le nombre de succès suit la loi $B(3; 0, 9)$.

1. Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 3)$, et donner la loi de X .

- En déduire $P(X \geq 1)$, et $P(X < 2)$.

Théorème (espérance, variance, écart type)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p .

- $E(X) = np$,
- $V(X) = np(1 - p)$,
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

$E(X)$ correspond au nombre moyen de succès sur n répétitions lorsque le nombre de séries de n répétitions devient très grand.

Exercice 5

L'archer qui touche la cible avec une probabilité 0,9 tire des séries de 20 flèches. En moyenne, combien de fois va-t-il toucher la cible par série de 20 flèches ?

II.2 Utilisation de la calculatrice pour la loi binomiale

	Casio	Texas	Numworks
Chemin	Opt Stat Dist Binomial	distrib	Outils Proba Lois Binomiale
$P(X = k)$	BinomialPD(k,n,p)	binomFdP(n,p,k)	binompdf(k,n,p)
$P(X \leq k)$	BinomialCD(k,n,p)	binomFRep(n,p,k)	binomcdf(k,n,p)

Exercice 6

L'archer qui touche la cible avec une probabilité 0,9 tire 20 flèches. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de fois qu'il touche la cible.

- Calculer $P(X = 18)$
- Calculer $P(X \leq 18)$
- Calculer $P(X < 17)$.
- Calculer $P(X > 15)$.
- Calculer $P(X \geq 18)$.

Remarque

On peut utiliser la calculatrice pour déterminer la loi d'une variable suivant une loi binomiale. Exemple avec les paramètres $n = 7$ et $p = 0,2$. X suit $B(7; 0,2)$

X	Y_1
0	0,21
1	0,367
2	0,276
3	0,115
4	0,029
5	0,004
6	3×10^{-4}
7	$1,3 \times 10^{-5}$