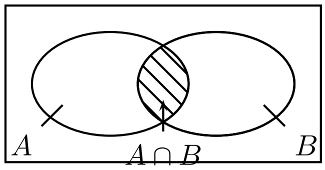
Chapitre 7 : Probabilités. Variables aléatoires

I Vocabulaire des probabilités

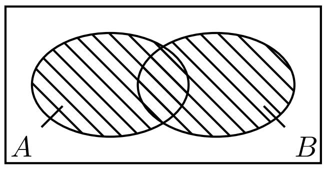
Rappels :

1. Intersection de deux ensembles.
   L'intersection de deux ensembles est l'ensemble des éléments communs aux deux ensembles.



$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ et } x \in B)$$

2. Réunion de deux ensembles.
   La réunion de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant à au moins l'un des deux ensembles.



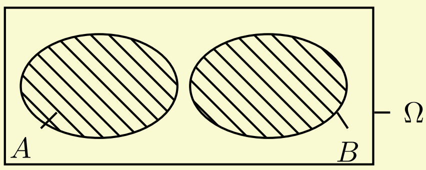
$A \cup B$ est la partie hachurée.

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Définition
Une expérience aléatoire est une expérience qui peut produire des résultats différents si on la répète dans les mêmes conditions.
L'ensemble des résultats (ou issues) possibles est appelé l'univers et se note Ω.
Un évènement est un sous-ensemble de l'univers.
Un évènement qui ne contient qu'un seul élément est un évènement élémentaire.

Exemple : Lancer d'un dé cubique.
L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Il est formé de 6 événements élémentaires.
Un événement élémentaire est : "Le dé donne 4".

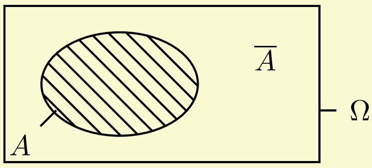
Définition
Deux événements A et B sont dits incompatibles ou disjoints si $A \cap B = \varnothing$ (leur intersection est vide).



Exemple :
Notons A : "le résultat est un 1", et B : "le résultat est supérieur ou égal à 3".
Alors, A et B sont incompatibles.

Remarque
Deux événements élémentaires sont toujours incompatibles (disjoints).

Définition
Dans une exprience aléatoire d'univers Ω, l'évènement contraire de A, noté $\overline{A}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.

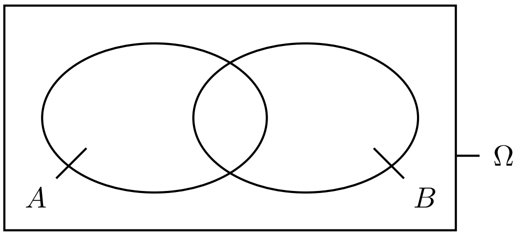


$$\overline{A} = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega,\ x \notin A\}$$

Exemple : Lancer d'un dé cubique.
Considérons A : "obtenir un nombre pair".
$A = \{2; 4; 6\}$.
L'événement contraire de A est "ne pas obtenir un nombre pair", ou encore ici "obtenir un nombre impair" :
$\overline{A} = \{1; 3; 5\}$.

Remarque
A et $\overline{A}$ sont toujours incompatibles.

Exercice 1
On considère deux sous-ensembles A et B d'un univers Ω.



Hachurer les ensembles suivants (un dessin par question) :

1. $\overline{A}$
2. $\overline{B}$
3. $\overline{A} \cap \overline{B}$
4. $\overline{A \cup B}$. Que remarque-t-on ?

Remarque
On a toujours :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

De plus, les symboles $\cap$ et $\cup$ sont distributifs l'un par rapport à l'autre :
Pour tous A , B et C

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B)\ \cup\ (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B)\ \cap\ (A \cup C)$$

II Probabilités

II.1 Définition et propriétés

Définition (Probabilité)
Soit $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un univers fini lié à une expérience aléatoire.
Cette notation signifie que l'univers est composé de n évènements élémentaires notés e_1,..., e_n.
On définit une loi de probabilité sur Ω lorsqu'à chaque e_i on associe un nombre positif ou nul p_i, et que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

On dit que p_i est la probabilité de e_i et on note naturellement $p_i = p(e_i)$.
Alors, la probabilité d'un évènement A quelconque est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.

Remarque
On a toujours $0 \leqslant p_i \leqslant 1$.

Théorème (Propriétés des probabilités)
Soient A et B des évènements d'un univers Ω.

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
2. Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.
4. $P(\Omega) = 1$, et $P(\varnothing) = 0$.
5. Pour tous évènements A et B on a :
$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$
6. Si A_1, A_2, ..., A_n sont des évènements deux à deux incompatibles ($\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$), alors :
$$P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Remarque
Comme $P(\Omega) = 1$, et $P(\varnothing) = 0$, Ω est appelé l'évènement certain, et $\varnothing$ l'évènement impossible.

Démonstration

1. C'est évident en considérant les évènements élémentaires qui composent A.
2. Idem.
3. $A \cup \overline{A} = \Omega$ et A et $\overline{A}$ sont incompatibles ($A \cap \overline{A} = \varnothing$).
   Donc $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + p\left(\overline{A}\right)$
   $P(\Omega) = P(A) + p\left(\overline{A}\right)$
   $1 = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$
   $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.
4. $P(\Omega) = 1$ par définition d'une loi de probabilité sur Ω.
   Pour $\varnothing = \overline{\Omega}$, on applique le 3. $A = \Omega$:
$$P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$
5. On peut écrire $A \cup B$ comme la réunion de deux évènements incompatibles :
$$A \cup B = A \cup \left(B \cap \overline{A}\right) \quad *$$

Or, $(B \cap \overline{A})) \cup (A \cap B) = B$. On a écrit B comme réunion de deux évènements disjoints.
D'où $P(B) = P(B \cap \overline{A})) + P(A \cap B)$, et donc : $P(B \cap \overline{A})) = P(B) - P(A \cap B)$
En revenant à la relation $*$, on obtient :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}))$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6. C'est une généralisation du point précédent. □

Exemple :
Dans un univers Ω, on donne deux évènements incompatibles A et B tels que $P(A) = 0.2$ et $P(B) = 0.7$.
Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$ et $P(\overline{B})$.

II.2 Lien entre statistiques et probabilités

Théorème (« loi des grands nombres », admis)
Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, les fréquences d'un résultat deviennent de plus en plus proches de la probabilité de ce résultat.

Exemple :
Si l'on lance un dé équilibré un très grand nombre de fois, les fréquences d'apparition du 2 deviennent proches de $P(2) = \dfrac{1}{6}$.

II.3 Équiprobabilité

Définition (Équiprobabilité)
On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les <u>événements élémentaires</u> ont la même probabilité.

Exemple :

1. On lance un pièce de monnaie non faussée. L'univers est constitué de 2 évènements élémentaires : Pile et Face.
   Il y a équiprobabilité : $P(Pile) = P(Face) = \dfrac{1}{2}$.
2. Si on lance un dé non pipé, l'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Remarque
S'il y a équiprobabilité sur un univers qui a n éléments, la probabilité de chaque évènement élémentaire est $\dfrac{1}{n}$.

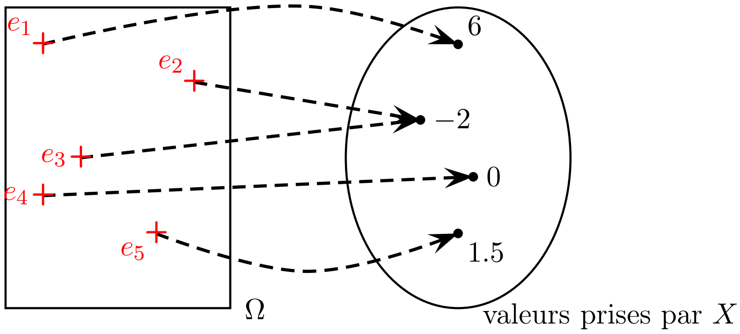
Théorème (Équiprobabilité)
Soit Ω un univers fini associé une expérience aléatoire. Si les évènements élémentaires qui forment Ω sont équiprobables, alors la probabilité de tout évènement A est donnée par la formule :

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$$

où $card(A)$ est le nombre d'éléments de A (cardinal).

III Variable aléatoire

Définition (Variable aléatoire)
Soit $\Omega = \{e_1, \dots, e_n\}$ un univers fini.
Une variable aléatoire X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
Définir une variable aléatoire X revient donc à associer à chaque évènement élémentaire e_i un nombre réel x_i.



Remarque
Le nombre k de valeurs distinctes prises par la variable aléatoire X est toujours inférieur ou égal à n (nombre d'événements élémentaires de Ω).

Définition (Loi de probabilité de X)
Soit Ω un univers muni d'une loi de probabilité P. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.
Déterminer la loi de probabilité de X consiste à trouver la probabilité de chacun des évènements $X = x_j$, pour $1 \leqslant j \leqslant k$.
Elle se présente souvent sous la forme d'un tableau.

x_i	x_1	$\dots$	x_k
$P(X = x_i)$	p_1	$\dots$	p_k

Remarque
Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{x_1; x_2; \dots; x_k\}$.
On a toujours $P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) = 1$.
Autrement dit, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Définition (Espérance et variance d'une variable aléatoire)
Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.
L'espérance de X, notée $E(X)$, est définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, P(X = x_i)$$

La variance de X, note $V(X)$, est définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 \, P(X = x_i)$$

Définition
L'écart-type de la variable X est noté $\sigma(X)$ et a pour valeur $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque
Lorsque X est une variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur, l'espérance $E(X)$ correspond au gain moyen que le joueur obtendrait sur un très grand nombre de parties.

— $E(X) > 0$ signifie que le jeu est intéressant pour le joueur ;
— $E(X) = 0$ ssi le jeu est équitable ;
— $E(X) < 0$ signifie que le jeu n'est pas intéressant pour le joueur.

Dans ce contexte, l'écart-type est un indicateur de la dispersion des gains par rapport à l'espérance.
Plus σ est est grand, plus le jeu est risqué.

IV Complément

Théorème (formule de König-Huygens)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 P(X = x_i) \quad - \quad [E(X)]^2$$

Ceci peut également s'écrire $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Démonstration

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 \, P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left((x_i)^2 - 2x_i \times E(X) + (E(X))^2\right) P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (x_i)^2 P(X = x_i) - 2E(X) \sum_{i=1}^{k} x_i \times P(X = x_i) + (E(X))^2 \times \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (x_i)^2 P(X = x_i) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 \times 1 \\
&= \sum_{i=1}^{k} (x_i)^2 P(X = x_i) - (E(X))^2
\end{aligned}$$

Donc $V(X) = \sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 P(X = x_i) \quad - \quad [E(X)]^2$. □

Propriété
Soit X une variable aléatoire.
Pour tous réels a et b, $E(aX + b) = aE(X) + b$, et $V(aX) = a^2 V(X)$.
On dit que l'espérance est linéaire et que la variance est quadratique.