

Dénombrement

I Principe additif

Un ensemble fini est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments.
Pour un ensemble fini E , $\text{Card}(E)$ désigne le nombre d'éléments de E .

Propriété (principe additif)

Si A et B sont deux parties **disjointes** d'un ensemble E , alors

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

Remarque

Dans le cas général, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

II Produit cartésien et principe multiplicatif

Définition (produit cartésien de deux ensembles)

Le produit cartésien de deux ensembles E et F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.

Propriété (principe multiplicatif)

Si E et F sont des ensembles finis constitués respectivement de m et n éléments, alors le produit cartésien $E \times F$ est fini de cardinal $\text{Card}(E \times F) = m \times n$.

Définition (k -uplet)

Soit E un ensemble fini à n éléments. Soit k un entier, $k \geq 1$.

Un k -uplet d'éléments de E est une liste ordonnée de k éléments de E .

L'ensemble de tous les k -uplets de E est l'ensemble $E \times E \times \cdots \times E$ (k fois). On le note E^k .

Exemple :

Un couple (2-uplet) de voyelles est $(a; i)$.

Un triplet (3-uplet) de consonnes est $(t; n; t)$.

Remarque

Dans un k -uplet, l'ordre des éléments est important $(a; i) \neq (i; a)$, et un même élément peut apparaître plusieurs fois, comme dans $(t; n; t)$.

Propriété

Soit $k \geq 1$ un entier. Soit E un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}$).

Le nombre de k -uplets de E est $\text{Card}(E^k) = n^k$.

Démonstration

On raisonne par récurrence sur k .

On note $P(k) : \text{Card}(E^k) = n^k$.

- Initialisation.
Pour $k = 1$, $\text{Card}(E^1) = n = n^1$, donc $P(1)$ est vraie.
- Hérédité :
Soit j un entier, $j \geq 1$.
On suppose que $\text{Card}(E^j) = n^j$.
L'ensemble E^{j+1} est le produit cartésien $E^j \times E$.
D'après le principe multiplicatif, (et avec l'hypothèse de récurrence), il vient :
 $\text{Card}(E^{j+1}) = \text{Card}(E^j) \times \text{Card}(E) = n^j \times n = n^{j+1}$.
Donc $P(j+1)$ est vraie.
- Conclusion :
Par récurrence, on a établi que pour tout $k \geq 1$, $\text{Card}(E^k) = n^k$. □

Exercice 1

Le nombre de couples de voyelles est : ...

Le nombre de triplets de consonnes est : ...

III Nombre de parties d'un ensemble

Rappel : On note $A \subset E$ pour désigner que A est un sous-ensemble (ou partie) de E (tout élément de A appartient à E).

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

Exemple :

Soit $E = \{a; b\}$.

L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de tous les sous-ensembles de E est : $\left\{ \emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\} \right\}$.

Propriété (nombre de parties d'un ensemble)

Soit n un entier naturel.

Tout ensemble E à n éléments possède 2^n sous-ensembles.

Ainsi, $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n .

On pose $P(n)$: tout ensemble à n éléments possède 2^n parties.

- Initialisation :
Pour $n = 0$, E est l'ensemble vide, $E = \emptyset$, et n'a qu'une sous partie qui est $\emptyset$.
Ainsi, pour $n = 0$, $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 1 = 2^0$. Donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité :
Soit un entier $k \geq 0$.
On suppose que tout ensemble à k éléments admet 2^k parties.
Soit E un ensemble à $(k+1)$ éléments.
Alors E est non vide ($k+1 \geq 1$). Donc il existe $x \in E$, et l'on peut écrire $E = A \cup \{x\}$ où A est l'ensemble à k éléments défini par $A = E \setminus \{x\}$, lire " E privé de x ". ($x \notin A$).
Pour dénombrer toutes les parties de E , on distingue deux familles disjointes :
 1. Celles qui ne contiennent pas x , ce sont les sous-parties de A .
Il y en a 2^k (d'après l'hypothèse de récurrence).
 2. Celles qui contiennent x . On les obtient en ajoutant x à chaque sous-partie de A .
Il y a donc aussi 2^k .

Les deux familles étant disjointes (principe additif), $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^k + 2^k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}$.
Cela termine l'hérédité : $P(k+1)$ est vraie.

— Conclusion :

Tout ensemble à n éléments admet 2^n sous-parties.

□

Remarque (n -uplet de $\{0; 1\}$)

Soit $E = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ un ensemble n éléments.

On peut associer à chaque partie A de E un n -uplet de $\{0; 1\}$:

Si $x_1 \in A$, on associe au premier terme le nombre 1, et 0 sinon.

Si $x_2 \in A$, on associe en 2e rang un 1, et 0 sinon.

Etc.

Il y a autant de sous-parties de E que de n -uplets de $\{0; 1\}$, soit 2^n .