Interrogation n° 4
Réponses du sujet 1

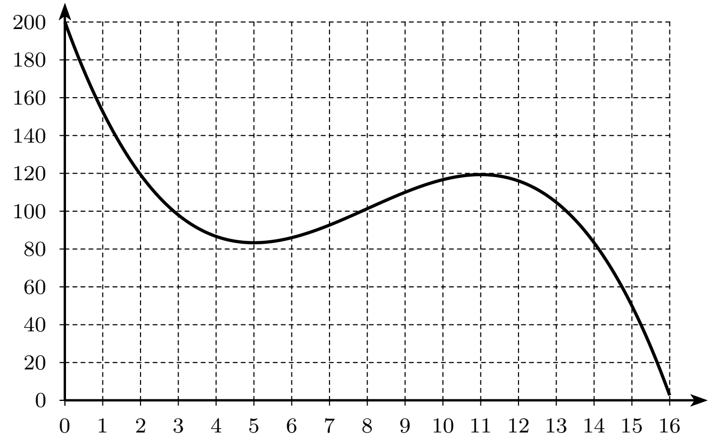
Exercice 1

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 3$ et de raison 0,84.
   (a) Calculer U_1.
   $U_1 = U_0 \times 0,84 = 3 \times 0,84 = 2,52.$
   (b) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
   $U_{n+1} = U_n \times 0,84$
   (c) Exprimer U_n en fonction de n.
   $U_n = U_0 \times q^n = 3 \times 0,84^n$
   (d) Calculer U_8, arrondir à 0,01 près.
   $U_8 = 3 \times 0,84^8 \approx 0,74$
   (e) Calculer $S_8 = U_0 + U_1 + \cdots + U_8$.
   $S_8 = U_0+U_1+\cdots+U_8 = U_0\times\dfrac{1-q^9}{1-q} = 3\times\dfrac{1-0,84^9}{1-0,84} \approx 14,85$
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 8$ et $u_{n+1} = 1,34 + u_n$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de n.
   $u_n = u_1 + (n-1) \times R = 8 + (n-1) \times 1,34$
   (b) Quel est le sens de variation de (u_n) ? Justifier.
   (u_n) est une suite arithmétique de raison $1,34 > 0$, donc (u_n) est croissante.
   (c) Calculer u_{100}.
   $u_{100} = 8 + (100-1) \times 1,34 = 140,66$
   (d) Calculer $T = u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.
   $T = u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} = \dfrac{(u_1 + u_{100}) \times 100}{2} = \dfrac{(8 + 140,66) \times 100}{2} = 7433.$

Exercice 2 (8 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0;16]$ par $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 8x^2 - 55x + 200.$



1. Donner par lecture graphique le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0;10]$. En quelle valeur est-il atteint ?
   Sur l'intervalle $[0;10]$, le minimum de f est environ 82, atteint pour $x = 5$.
2. Déterminer l'expression de la dérivée de f.
   $f'(x) = -\dfrac{1}{3} \times 3x^2 + 8 \times 2x - 55 = -x^2 + 16x - 55.$
3. Montrer que $f'(x) = (5-x)(x-11)$.
   On développe.
   $(5-x)(x-11) = 5x - 55 - x^2 + 11x = -x^2 + 16x - 55 = f'(x).$
   On a donc effectivement $f'(x) = (5-x)(x-11)$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;16]$.
   $5 - x = 0$ ssi $x = 5$.
   $x - 11 = 0$ ssi $x = 11$.

x	0		5		11		16
$5-x$		+	0	−		−	
$x-11$		−		−	0	+	
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	200	↘	$\approx 83,33$	↗	$\approx 119,33$	↘	$\approx 2,67$

Sujet 2

Exercice 3

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 3$ et de raison 0,37.
   (a) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
   $U_{n+1} = U_n + 0,37$
   (b) Exprimer U_n en fonction de n.
   $U_n = U_0 + nR = 3 + 0,37 \times n.$
   (c) Calculer U_8.
   $U_8 = 3 + 0,37 \times 8 = 5,96.$
   (d) Calculer $S_8 = U_0 + U_1 + \cdots + U_8$.
   $S_8 = \dfrac{(U_0 + U_8) \times 9}{2} = \dfrac{(3 + 5,96) \times 9}{2} = 40,32.$
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 8$ et $u_{n+1} = 1,04 u_n$.
   (a) Calculer u_2.
   $u_2 = u_1 \times q = 8 \times 1,04 = 8,32.$
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 8 \times 1,04^{n-1}.$
   (c) Quel est le sens de variation de (u_n) ? Justifier.
   La suite (u_n) est géométrique. Son premier terme est positif, et la raison est $1,04 > 1$.
   Donc (u_n) est croissante.
   (d) Calculer u_{100}, arrondir à 0,01.
   $u_{100} = 8 \times 1,04^{100-1} = 388,50.$
   (e) Calculer $T = u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$, arrondir à 0,01.
   $T = u_1 \times \dfrac{1 - q^{100}}{1 - q} = 8 \times \dfrac{1 - 1,04^{100}}{1 - 1,04} \approx 9900,99.$

Exercice 4 (8 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0;16]$ par $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 13x^2 + 72x$.

1. Sur l'intervalle $[0;10]$, le maximum de f est environ 123, atteint pour $x = 4$.
2. Déterminer l'expression de la dérivée de f.
   $f'(x) = \dfrac{2}{3} \times 3x^2 - 13 \times 2x + 72 = 2x^2 - 26x + 72.$
3. Montrer que $f'(x) = (2x - 8)(x - 9)$.
   On développe.
   $(2x - 8)(x - 9) = 2x^2 - 18x - 8x + 72 = 2x^2 - 26x + 72 = f'(x).$
   Donc $f'(x) = (2x - 8)(x - 9)$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;16]$.

x	0		4		9		16
$2x - 8$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 9$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\approx 122,67$	$\searrow$	81	$\nearrow$	$\approx 554,67$