Terminale STI. Correction du devoir n° 4

Exercice 1 (3 points)

Compléter sur l'énoncé.

1. Soit, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   La dérivée de la fonction f est donnée pour tout $x \neq 0$ par $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
2. Pour tous réels a et b, $\log(a \times b) = \log a + \log b$
3. Pour tout $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\log(a^x) = x \log a$
4. Donner deux autres propriétés de la fonction log (parmi définition, sens de variation, signe, propriétés algébriques, etc.)
   (a) La fonction log est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
   (b) Pour tous $x > 0$ et b réel, on a $\log x = b$ ssi $x = 10^b$

Exercice 2 (7 points)

Partie A

Le coût de production de x m^3 de détergent est donné en euros par $C(x) = x^2 + 60x + 121$ pour $x \in [1; 30]$.
On note f la fonction représentant le coût moyen par m^3.

1. Expression de $f(x)$.
   Pour tout $x \in [1; 30]$,
   $$f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 + 60x + 121}{x} = x + 60 + \frac{121}{x}$$
2. (a) Calculer $f'(x)$.
   $$f'(x) = 1 + 121 \times \frac{-1}{x^2} = 1 - \frac{121}{x^2}.$$
   (b) En factorisant,
   $$f'(x) = \frac{x^2}{x^2} - \frac{121}{x^2} = \frac{x^2 - 121}{x^2}.$$
   Or, $x^2 - 121 = (x - 11)(x + 11)$ avec l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
   On peut aussi développer $(x - 11)(x + 11)$.
   Donc $f'(x) = \dfrac{(x - 11)(x + 11)}{x^2}$.
3. Tableau de variation.
   On étudie le signe de $f'(x) = \dfrac{(x - 11)(x + 11)}{x^2}$ sur $[1; 30]$.
   $x - 11 = 0$ ssi $x = 11$.
   $x + 11 = 0$ ssi $x = -11$ mais $-11 \notin [1; 30]$.
   $x^2 = 0$ ssi $x = 0$ (valeur interdite mais $0 \notin [1; 30]$).
   Pour tout $x \in [1; 30]$, $x^2 > 0$ (un carré est toujours positif ; et x ne s'annule pas sur l'intervalle).

x	1		11		30
$x - 11$		$-$	0	$+$	
$x + 11$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	182	$\searrow$	82	$\nearrow$	$\dfrac{2821}{30}$

   On calcule les images avec l'expression de $f(x) = x + 60 + \dfrac{121}{x}$.
   $f(1) = 1 + 60 + \dfrac{121}{1} = 182$
   $f(11) = 11 + 60 + \dfrac{121}{11} = 82.$
   $f(30) = 30 + 60 + \dfrac{121}{30} = \dfrac{2821}{30} \approx 94.$
4. Le coût moyen minimal est de 82 euros par m^3. Il est obtenu pour une production de 11 m^3 de détergent.

Partie B
Le détergent est vendu 110 euros par m^3.

1. Exprimer la recette $R(x)$ en fonction de x.
   Recette = Prix × quantite
   Donc $R(x) = 110 \times x$
2. Montrer que le bénéfice est donné par $B(x) = -x^2+50x-121$.
   $B(x) = \text{Recette} - \text{Cout}$
   $B(x) = \text{Prix} \times \text{quantite} - \text{Cout}$
   Donc $B(x) = 110x - (x^2+60x+121) = -x^2+50x-121$.
3. Variations de B sur $[1;30]$.
   $B'(x) = -2x+50$.
   Donc $B'(x) = 0$ ssi $-2x+50 = 0$ ssi $x = 25$.

x	1		25		30
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-72	$\nearrow$	504	$\searrow$	479

   $B(1) = -1^2+50\times 1-121 = -72$.
   $B(25) = -25^2+50\times 25-121 = 504$.
   $B(30) = -30^2+50\times 30-121 = 479$.
4. Le bénéfice maximal est de 504 euros, obtenu pour 25 m^3 produits.

Exercice 3 (2 points)
Exprimer en fonction de $\log 5$ et de $\log 3$.
$A = \log(5\times 3) + 7\log\left(\dfrac{5}{3}\right)$
$A = \log(5)+\log(3)+7(\log(5)-\log(3)) = 8\log(5)-6\log(3)$.
$B = \log(5^3) = 3\log 5$

Exercice 4 (5 points)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $3\times 10^x = 12$ ssi $10^x = 4$ ssi $x = \log 4$ $S = \{\log 4\}$.
2. $11+2\log x = 0$ ssi $\log x = -5,5$ ssi $x = 10^{-5,5}$ $S = \{10^{-5,5}\}$.
3. $2^x = 0,3$ ssi $\log(2^x) = \log(0,3)$ ssi $x\log 2 = \log 0,3$ ssi $x = \dfrac{\log 0,3}{\log 2}$. L'équation a une seule solution qui est $\dfrac{\log 0,3}{\log 2}$.
4. $0,8^x \leqslant 5$ ssi $\log(0,8^x) \leqslant \log 5$ ssi $x\log 0,8 \leqslant \log 5$ ssi $x \geqslant \dfrac{\log(5)}{\log(0,8)}$.
   En effet, comme $0,8<1$, on a $\log 0,8 < 0$, on change le sens de l'inégalité.
   $S = \left[\dfrac{\log(5)}{\log(0,8)}; +\infty\right[$

Exercice 5 (3 points)
Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 375\times 1,06^n+250$, le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac (en cm) , n jours après le 1er janvier 2020.
Lorsque le niveau d'eau dépasse 10 mètres, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.
Calculer la première date d'intervention des techniciens sur les vannes du barrage.

On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 1000$.
$375\times 1,06^n + 250 > 1000$ ssi $1,06^n > 2$ ssi $n\log 1,06 > log 2$ ssi $n > \dfrac{\log 2}{\log 1,06} \approx 11,9$.
Le plus petit entier qui convient est 12.
Donc les techniciens interviennent pour la première fois 12 jours après le 1er janvier 2020 soit le 13 janvier 2020.