Chapitre 3 : Généralités sur les fonctions

I Ensemble de définition, courbe représentative

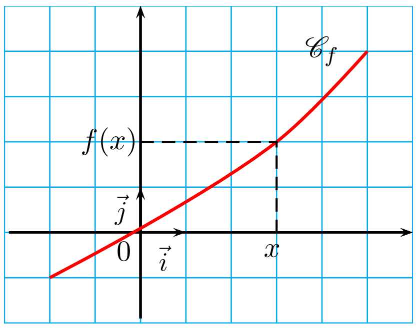
Définition
Une fonction f définie en $x \in \mathbb{R}$ associe à x un unique nombre noté $f(x)$. L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble de tous les nombres réels pour lesquels $f(x)$ existe.

Exercice 1
Rechercher l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+2} + \dfrac{1}{x-1}$.

Remarque
Deux fonctions f et g sont égales lorsqu'elles ont même ensemble de définition ($D_f = D_g$) et que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = g(x)$.

Exercice 2
Les fonctions $f(x) = x + 3$ et $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ sont-elles égales ?

Définition
On se place dans un repère du plan.
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
La courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$, est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $x \in D$ et $y = f(x)$.



$D_f = [-2; 5]$

II Variations

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est croissante sur I lorsque pour tous $x_1,\ x_2 \in I$

$$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

En d'autres termes, les images de deux nombres de I sont rangées dans le même ordre que les deux nombres.
On dit que f est décroissante sur I lorsque pour tous $x_1,\ x_2 \in I$

$$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

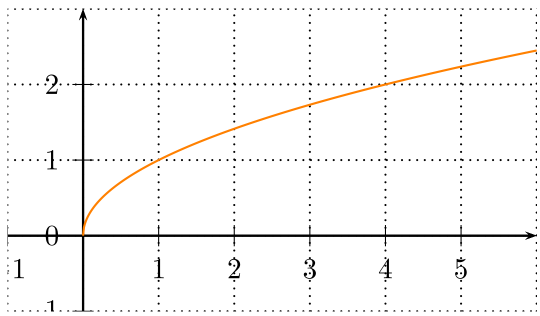
En d'autres termes, les images de deux nombres de I sont rangées dans l'ordre contraire des deux nombres.

Remarque
Avec l'inégalité stricte $f(x_1) < f(x_2)$, f est strictement croissante sur I.

Exercice 3
Déterminer les variations de $x \mapsto x^2 - 6x$ sur $]-\infty; 3]$ et $[3; +\infty[$.

III La fonction racine carrée

Définition
La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.



Théorème
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

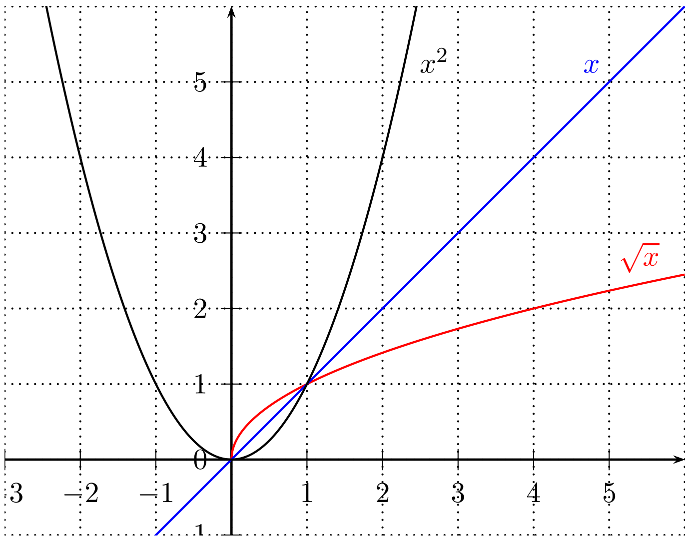
Démonstration (au programme)
Soient a, $b \in [0; +\infty[$. Supposons que $a < b$.

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$
$$f(a) - f(b) = \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Par hypothèse, $a < b$, donc $a - b < 0$.
Il est clair que $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ par somme de deux nombres positifs ($b > 0$).
Ainsi, d'après la règle des signes, $f(a) - f(b) < 0$, soit $f(a) < f(b)$.
Ainsi, pour tous a, $b \in [0; +\infty[$, si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
Donc la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. □

Exercice 4
Déterminer l'image d'un intervalle par la fonction racine carrée : ressource 927

Exercice 5
Étudier les positions relatives des courbes des fonctions définies par $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, et $h(x) = \sqrt{x}$. Justifier par le calcul.



Propriété
Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$.
Si $x \geqslant 1$, alors $\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$.

Démonstration (au programme)

1. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors, en multipliant membre à membre par $x \geqslant 0$, il vient $x^2 \leqslant x$.
   Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit que $\sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x}$. Or, lorsque $x \geqslant 0$, $\sqrt{x^2} = x$. On a donc montré que $x \leqslant \sqrt{x}$. Donc, pour tout x tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$.
   Note : de façon générale, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
2. Si $x \geqslant 1$, alors, en multipliant membre à membre par $x \geqslant 0$, il vient $x^2 \geqslant x$.
   Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit que $\sqrt{x^2} \geqslant \sqrt{x}$, soit $x \geqslant \sqrt{x}$.
   Finalement, lorsque $x \geqslant 1$, on a $\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$.

IV La fonction valeur absolue

Définition
La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par : $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

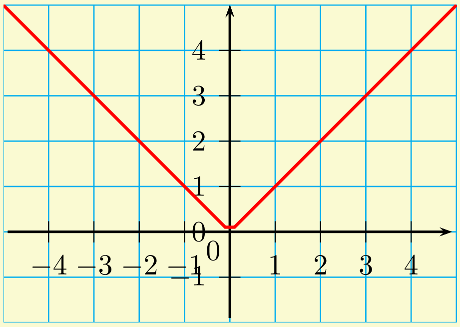
Exemple :
$|5| = 5$, et $|-7| = 7$.

Exercice 6
Calculer $|-1-\sqrt{7}|$, $|2+\sqrt{5}|$, $|3-\pi|$

Remarque
Une valeur absolue est toujours positive ou nulle.

Exercice 7
Exprimer sans valeur absolue $|x+3|$, et $|-2x+28|$.

Propriété (Courbe représentative)
Par définition, la fonction valeur absolue est affine par morceaux.



Propriété

1. Pour tous réels x et y, $|x| = |y|$ ssi ($x = y$ ou $x = -y$).
2. Pour tous réels k et x, $|kx| = |k| \times |x|$.

Propriété (lien avec la distance)

1. On peut également définir la valeur absolue d'un nombre par sa distance à zéro : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = d(x; 0)$.
2. Pour tous réels a et b, $d(a; b) = |a - b|$.

Remarque
On fait ici un abus de langage puisqu'on confond un nombre et le point qui le représente sur la droite graduée. On retiendra que la valeur absolue permet de décrire facilement la distance en deux nombres réels.

Exercice 8

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-5| = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+3| < 4$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+1| \geqslant 6$.

Théorème (Inégalité triangulaire)
Pour tous réels x et y,

$$\big|\, |x| - |y| \,\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Démonstration
En devoir maison. □

Remarque
Attention, de façon générale, $|x+y| \neq |x|+|y|$.
Plus précisément, $|x+y| = |x|+|y|$ ssi x et y sont de même signe.

Exercice 9 (synthèse)
Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction de référence : ressource 928

V Opérations sur les fonctions

Définition
Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D. Soit k un nombre réel .
On peut alors définir de nouvelles fonctions sur D :

- $(f+k) : x \mapsto f(x)+k$
- $(f+g) : x \mapsto f(x)+g(x)$
- $(kf) : x \mapsto k \times f(x)$
- $(fg) : x \mapsto f(x) \times g(x)$

  Si g ne s'annule pas sur D, on peut également définir les fonctions :
- $\left(\frac{1}{g}\right) : x \mapsto \frac{1}{g(x)}$.
- $\left(\frac{f}{g}\right) : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple :
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x-1$ et $g(x) = x^2 - x$.
L'expression de la fonction $u = -4f$ est $u(x) = \ldots$
L'expression de la fonction $v = f \times g$ est $v(x) = \ldots$

Théorème (Opérations et sens de variation)
Soient f et g deux fonctions monotones sur un intervalle I. Soit k un réel.

- $f+k$ est monotone sur I, de même sens de variation que f,
- Si f et g sont croissantes sur I, alors $f+g$ est aussi croissante sur I,
- Si f et g sont décroissantes sur I, alors $f+g$ est aussi décroissante sur I.
- On suppose $k \neq 0$.
  La fonction kf est monotone sur I :
  — de même sens de variation que f si $k > 0$,
  — de sens contraire si $k < 0$.

Démonstration
On se limite à quelques points du théorème, les autres cas se montrent de façon analogue.

1. $f+k$, avec f décroissante sur I.
   Soient a, b appartenant à I, supposons $a < b$.
   Comme f est décroissante sur I, $f(a) \geqslant f(b)$.
   En ajoutant une constante membre à membre, le sens de l'inégalité est conservé, donc $f(a)+k \geqslant f(b)+k$.
   Donc la fonction $(f+k)$ est décroissante sur I.

2. $f + g$ avec f et g croissantes sur I.
   Soient a, b appartenant à I, supposons $a < b$.
   Comme f est croissante sur I, $f(a) \leqslant f(b)$.
   De même, comme g est croissante sur I, $g(a) \leqslant g(b)$.
   En additionnant membre à membre, il vient $f(a) + g(a) \leqslant f(b) + g(b)$.
   Donc $(f + g)$ est croissante sur I.
3. kf, avec f décroissante sur I et $k < 0$.
   Soient a, b appartenant à I, supposons $a < b$.
   Comme f est décroissante sur I, $f(a) \geqslant f(b)$.
   En multipliant par $k < 0$, l'inéglité change de sens, donc $k \times f(a) \leqslant k \times f(b)$.
   Donc la fonction (kf) est croissante sur I.

Exercice 10
On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-3		2		11
$f(x)$	1	$\nearrow$	7	$\searrow$	4

1. Donner le tableau de variation de la fonction $u = f - 5$
2. Donner le tableau de variation de la fonction $v = -2f$

Exercice 11

1. Déterminer les variations de $x \mapsto x^2 + 5\sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer les variations de $x \mapsto \dfrac{3}{x} - 2x + 1$ sur $]0; +\infty[$.

Remarque
On ne peut rien dire en général sur le sens de variation de fg, ni sur celui de $f + g$ lorsque f et g n'ont pas le même sens de variation.

Théorème ($\sqrt{u}$ et $\dfrac{1}{u}$)
Soit u une fonction monotone définie sur un intervalle I.

1. On suppose que pour tout $x \in I$, $u(x) \geqslant 0$ (ainsi la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est bien définie sur I).
   Alors la fonction $\sqrt{u}$ est monotone sur I, de même sens de variation que u.
2. On suppose que la fonction u ne s'annule pas sur I et garde un signe constant.
   Alors la fonction $\dfrac{1}{u}$ est monotone sur I, de sens de variation contraire à celui de u.

Démonstration

1. On se limite au cas où u est croissante sur I.
   Soient a, b appartenant à I, supposons $a < b$.
   Comme u est croissante sur I et prend des valeurs positives, $0 \leqslant u(a) \leqslant u(b)$.
   En appliquant la fonction racine carrée qui est croissante sur $[0; +\infty[$, on a donc $\sqrt{u(a)} \leqslant \sqrt{u(b)}$.
   Donc la fonction $\sqrt{u}$ est croissante sur I.
2. En exercice.