Exercice 1

1. Placer dans un repère orthonormé les points $A(-4;2)$, $B(1;-1)$, $C(2;2)$ et $D(-3;5)$. On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

2. Prouver que $ABCD$ soit un parallélogramme.
   $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-4)\\-1-2\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2+3\\2-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$.
   $\boxed{\text{Comme } \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\ ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$

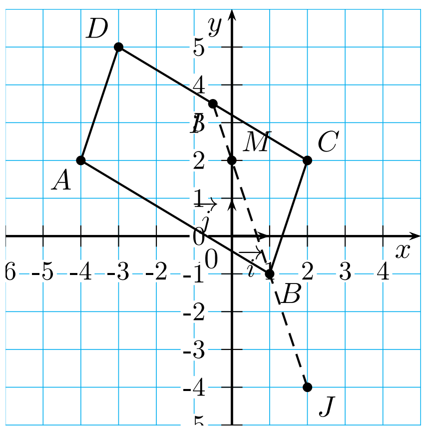
3. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-(-4)\\2-2\end{pmatrix}$, $\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}}$.

4. Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
   En multipliant par $\frac{1}{3}$, on a $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}x_C-x_M\\y_C-y_M\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}2-x_M\\2-y_M\end{pmatrix}$.
   Comme les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ sont égaux, ils ont les mêmes coordonnées :
   $\begin{cases}2-x_M=2\\2-y_M=0\end{cases}$, donc $\begin{cases}x_M=0\\y_M=2\end{cases}$. $\boxed{M(0;2).}$

5. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[CD]$.
   $x_I=\frac{x_C+x_D}{2}=\frac{2-3}{2}=-\frac{1}{2}$ ou -0.5.
   $y_I=\frac{y_C+y_D}{2}=\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2}$ ou 3.5. $\boxed{I(-0.5;3.5)}$.

6. Montrer que les points I, M et B sont alignés.
   On montre que les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires.
   $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x_M-x_I\\y_M-y_I\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}0.5\\-1.5\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}x_B-x_I\\y_B-y_I\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}1.5\\-4.5\end{pmatrix}$.
   Il est clair que $\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{IM}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont donc colinéaires, $\boxed{\text{donc les points } I,\ M \text{ et } B \text{ sont alignés.}}$

7. Soient $a\in\mathbb{R}$, et $J(a;-4)$. Déterminer a pour que les droites (AJ) et (DM) soient parallèles.
   $(AJ)//(DM)$ ssi $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont colinéaires.
   $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}0-(-3)\\2-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}a+4\\-6\end{pmatrix}$
   $xy'-yx'=0$ ssi $3\times(-6)-(-3)(a+4)=0$, ssi $-18+3a+12=0$, soit $a=2$.
   $\boxed{(AJ)//(DM) \text{ ssi } a=2, \text{ c'est-à-dire ssi } J(2;-4).}$



Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[-1;4]$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 3$.

1. Compléter le tableau de valeurs de f (aucune justification n'est attendue).

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	3	6	7	6	3

2. Justifier que f n'est pas croissante sur $[-1;4]$.
   On remarque que $2 < 3$, mais $f(2) = 7$ et $f(3) = 6$, donc $f(2) > f(3)$.
   $\boxed{\text{Donc } f \text{ n'est pas croissante sur } [-1;4].}$
3. Vérifier que pour tout $x \in [-1;4]$, $f(x) = -(x-2)^2 + 7$.
   En développant, $-(x-2)^2+7 = -(x^2-4x+4)+7 = -x^2+4x-4+7 = -x^2+4x+3 = f(x)$.
   $\boxed{\text{Donc } f(x) = -(x-2)^2 + 7.}$
4. En déduire que f admet un maximum sur $[-1;4]$. Préciser la valeur de ce maximum et en quelle valeur il est atteint.
   Un carré est toujours positif, donc pour tout $\in [-1;4]$, $(x-2)^2 \geqslant 0$, et $-(x-2)^2 \leqslant 0$.
   En ajoutant 7, pour tout $x \in [-1;4]$, $-(x-2)^2 + 7 \leqslant 7$, soit $f(x) \leqslant 7$.
   De plus, $f(2) = 7$.
   $\boxed{\text{Donc } f \text{ admet un maximum de 7 et ce maximum est obtenu lorsque } x = 2.}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x+4)^2 - 1$.

1. Rappeler le tableau de variation de la fonction carré.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

2. En revenant à la définition, montrer que f est croissante sur l'intervalle $[-4;+\infty[$.
   Soient $a, b \in [-4;+\infty[$, supposons $a < b$.
   On a donc $-4 \leqslant a < b$.
   Donc $0 \leqslant a+4 < b+4$.
   Comme la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$, il vient $(a+4)^2 \leqslant (b+4)^2$.
   En multipliant par $3 > 0$, $3(a+4)^2 \leqslant 3(b+4)^2$.
   En ajoutant une constante, $3(a+4)^2 - 1 \leqslant 3(b+4)^2 - 1$.
   Ainsi, $f(a) \leqslant f(b)$.
   $\boxed{f \text{ est croissante sur } [-4;+\infty[.}$
3. Montrer de même que f et décroissante sur $]-\infty;-4]$.
   Soient $a, b \in]-\infty;-4]$, supposons $a < b$.
   On a donc $a < b \leqslant -4$.
   Donc $a+4 < b+4 \leqslant 0$.
   Comme la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$, il vient $(a+4)^2 \geqslant (b+4)^2$.
   En multipliant par $3 > 0$, $3(a+4)^2 \geqslant 3(b+4)^2$.
   En ajoutant une constante, $3(a+4)^2 - 1 \geqslant 3(b+4)^2 - 1$.
   Ainsi, $f(a) \geqslant f(b)$.
   $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]-\infty;-4].}$
4. En déduire le tableau de variation de f sur $[-6;2]$.
   $f(-4) = -1$, $f(-6) = 11$, et $f(2) = 107$.

x	-6		-4		2
$f(x)$	11	$\searrow$	-1	$\nearrow$	107