1re G. Correction de l'interrogation de mathématiques n° 5
Sujet 1

Exercice 1 (3 points)
Compléter sur l'énoncé. Aucune justification n'est attendue.

1. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{4x+11}$.
   Pour tout $x\in[0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x+11}}$
2. Rappeler une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.
   $S=\dfrac{(\text{premier terme }+\text{ dernier terme})}{2}\times(\text{nombre de termes})$
3. Donner un exemple de terme général d'une suite géométrique croissante :
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=3\times 2^n$
4. Soit (G_n) la suite géométrique de premier terme $G_0=500$ et de raison $q=0,9$.
   (a) L'expression de G_n en fonction de n est :
   Pour tout entier n, $G_n=500\times 0,9^n$
   (b) Arrondi au dixième, $S_{15}=G_0+G_1+\cdots+G_{15}\approx 4073,5$

Exercice 2 (2 points)
F et F sont indépendants ssi $P(F)=P_T(F)$.
$P(F)=\dfrac{450}{1000}=0,45$. Et $P_T(F)=\dfrac{230}{540}=\dfrac{23}{54}\approx 0,43$.
$\boxed{\text{Comme } P(F)\neq P_T(F),\ F \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendants}}$

Exercice 3 (5 points)
Au début d'une expérience, la masse des bactéries mesurée dans une solution aqueuse est de 3 mg. On estime que la masse de bactéries augmente de 14 % tous les jours. On pose $B_0=3$ et pour tout $n\geqslant 1$, on note B_n la masse des bactéries après n jours, exprimée en mg.

1. Calculer B_1 et montrer que $B_2=3,8988$.
   $B_1=B_0+0,14\times B_0=3+0,14\times 3=3,42$.
   $B_2=B_1+0,14\times B_1=3,42+0,14\times 3,42=3,8988$.
2. Exprimer B_{n+1} en fonction de B_n.
   $\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ B_{n+1}=B_n+0,14\times B_n=1,14\times B_n.}$
   On peut aussi justifier en rappelant qu'augmenter de 14% revient à multiplier par 1,14 (coefficient multiplicateur d'une hausse de 14 %, $c=1+t$).
   Donc $B_{n+1}=1,14\times B_n$.
3. En déduire la nature de (B_n), et précise les éléments caractéristiques.
   $\boxed{\text{Donc } (B_n) \text{ est la suite géométrique de premier terme } B_0=3 \text{ et de raison 1,14.}}$
4. Donner l'expression de B_n en fonction de n.
   $\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ B_n=B_0\times q^n=3\times 1,14^n.}$
5. Bonus : Déterminer le nombre de jours à partir duquel la masse de bastérie dépasse 100 g.
   On cherche le plus petit entier n tel que $B_n>100$.
   La suite est géométrique avec $B_0=3$ et $q=1,14$.
   Comme $B_0>0$ et $q>1$, la suite (B_n) est strictement croissante.
   Avec la calculatrice,
   $B_{26}=3\times 1,14^{26}\approx 90,5$
   $B_{27}=3\times 1,14^{27}\approx 103,2$
   L'entier cherché est 27.
   $\boxed{\text{La masse de bactéries dépasse 100 g au bout de 27 jours.}}$

Exercice 4 (5 points, +1)
Le salaire net de Jean est de 1 700 euros en janvier 2023. Chaque mois il augmente de 8 euros.
On pose $v_0=1\,700$ le salaire du mois de janvier 2023, puis on note v_1 le salaire du mois de février 2023, et pour tout $n\geqslant 1$, v_n le salaire du n^{e} mois après janvier 2023.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   $\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=v_n+8}$
2. En déduire la nature de la suite, préciser la raison et le premier terme.
   $\boxed{\text{Donc } (v_n) \text{ est la suite arithmétique de raison 8 et de 1er terme } v_0=1700.}$
3. Exprimer v_n en fonction de n.
   $\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ v_n=v_0+nr=1700+8n.}$
4. À quelle date le salaire de Jeanne dépassera-t-il pour la première fois 2 000 euros ? Justifier.
   $1700+8n>2000$ ssi $8n>300$ ssi $n>\dfrac{300}{8}=37,5$.
   ainsi, $n\geqslant 38$.
   $38=3\times 12+2$, donc $n=38$ correspond au mois de mars 2026.
   $\boxed{\text{Le salaire dépasse 2000 euros pour la première fois en mars 2026.}}$
5. Quelle somme totale percevra-t-elle comme salaire de janvier 2023 à décembre 2033 inclus ?
   La période représente 11 années complètes, soit $11\times 12=132$ mois.
   Il s'agit donc de calculer la somme des 132 premiers termes de la suite (v_n), de v_0 à v_{131}.
   $v_{131}=v_0+131r=1700+131\times 8=2748$.
$$\begin{aligned} v_0+v_1+\cdots+v_{131} &= \frac{v_0+v_{131}}{2}\times 132\\ &= \frac{1700+2748}{2}\times 132\\ &= 293\,568\end{aligned}$$
   $\boxed{\text{Cela représente 293 568 euros.}}$

6. Bonus : À partir de quelle date la somme totale des salaires dépasse-t-elle 300 000 euros ?
Posons $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. On cherche le plus petit entier n tel que $S_n > 300000$.

$$\begin{aligned}\frac{v_0+v_n}{2}\times(n+1) &> 300000\\ (1700+1700+8n)(n+1) &> 600000\\ (8n+3400)(n+1) &> 600000\\ 8n^2+3408n+3400-600000 &> 0\\ 8n^2+3408n-596600 &> 0\end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3408^2 - 4\times 8\times(-596600) = 30705664 > 0$.
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \approx -559,3$ $\qquad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \approx 133,3$.
Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines, ici $a = 7 > 0$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$8x^2+3408x-596600$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc le plus petit entier (naturel) n tel que $7n^2 + 3507n - 596500 > 0$ est 133.
$133 = 11 \times 12 + 1$. Le mois correspondant vient 11 ans et 1 mois après janvier 2023, c'est donc février 2034.

$\boxed{\text{La somme des salaires dépasse 300 000 euros pour la première fois en février 2034.}}$

Exercice 5 (5 points +1)
Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-7}{2x-2}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{6}{(2x-2)^2}$.
   En posant $u(x) = 4x-7$, et $v(x) = 2x-2$, les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et v s'annule pour $x = 1$.
   Donc, par quotient, f est dérivable en tout réel $x \neq 1$. On rappelle la dérivée d'un quotient de 2 fonctions, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.
   Pour tout $x \neq 1$,
   $f'(x) = \dfrac{4(2x-2)-(4x-7)\times 2}{(2x-2)^2} = \dfrac{8x-8-8x+14}{(2x-2)^2} = \dfrac{6}{(2x-2)^2}$.
2. Montrer qu'il existe deux points de $\mathscr{C}$ où la tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y = 6x+8$. Donner les abscisses de ces deux points (on ne demande pas leurs ordonnées).
   La tangente T_a est parallèle à cette droite ssi elle a le même coefficient directeur, 6. Comme $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente, on résout l'équation $f'(a) = 6$.
   $\dfrac{6}{(2x-2)^2} = 6$ ssi $(2x-2)^2 = 1$
   ssi $2x-2 = -\sqrt{1}$ ou $2x-2 = \sqrt{1}$
   ssi $2x = 1$ ou $2x = 3$
   ssi $x = 0,5$ ou $x = 1,5$.
   $\boxed{\text{Il y a deux points de } \mathscr{C} \text{ en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation } y=6x+8 \text{, ce sont les points d'abscisses } 0,5 \text{ et } 1,5.}$
   Remarque : à partir de $(2x-2)^2 = 1$, on pouvait aussi développer et résoudre une équation de degré 2 via Δ.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 2.
   $f(2) = \dfrac{4\times 2-7}{2\times 2-2} = \dfrac{1}{2}$, et $f'(2) = \dfrac{6}{2^2} = \dfrac{3}{2}$.
   $y = f'(2)(x-2) + f(2) = \dfrac{3}{2}(x-2) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$.
   $\boxed{T \text{ a pour équation } y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}.}$
4. Montrer que pour tout réel $x \neq 1$,
   $f(x) - \left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{-3(x-2)^2}{2(x-1)}$.
   $f(x) - \left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{4x-7}{2(x-1)} - \dfrac{3x-5}{2} = \dfrac{4x-7-(3x-5)(x-1)}{2(x-1)}$
   $= \dfrac{4x-7-(3x^2-3x-5x+5)}{2(x-1)} = \dfrac{-3x^2+12x-12}{2(x-1)}$
   $= \dfrac{-3(x^2-4x+4)}{2(x-1)} = \dfrac{-3(x-2)^2}{2(x-1)}$
5. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente T.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-3/2$		$-$		$-$		$-$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-3(x-2)^2}{2(x-1)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	

Ainsi, $f(x) - \left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}\right) > 0$ ssi $x \in]-\infty;1[$.

$\boxed{\mathscr{C} \text{ est au-dessus de } T \text{ sur }]-\infty;1[\text{, et en dessous de } T \text{ sur }]1;+\infty[.}$

Réponses non détaillées du sujet 2

Exercice 6 (3 points)

Compléter sur l'énoncé. Aucune justification n'est attendue.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-4x+11)^5$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -20(-4x+11)^4$
2. (A_n) est la suite arithmétique de premier terme $A_0 = 5$ et de raison 9.
   (a) Pour tout $n \geqslant 0$, $A_n = 5 + 9n$
   (b) $S_{20} = A_0 + A_1 + \cdots + A_{20} = 1995$
3. Donner un exemple de terme général d'une suite arithmétique décroissante :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - 5n$
4. Donner la définition d'une suite (V_n) géométrique.
   (V_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n \times q$.

Exercice 7 (2 points)

H et B sont indépendants ssi $P(H) = P_B(H)$.

$P(H) = \dfrac{550}{1000} = 0,55$. Et $P_B(H) = \dfrac{160}{220} = \dfrac{8}{11} \approx 0,73$.

$\boxed{\text{Comme } P(H) \neq P_B(H),\ H \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants}}$

Exercice 8 (5 points)

Une entreprise de sécurité lance un nouveau système d'alarme. La première semaine 2000 unités seront produites, puis la production augmente de 8% chaque semaine. On note u_n le nombre de systèmes fabriqués la n-ième semaine (on a donc $u_1 = 2000$). On arrondira les résultats à l'unité.

1. Calculer u_2 et u_3.
   Augmenter de 8 % revient à multiplier par 1+0,08=1,08.
   $u_2 = u_1 \times 1,08 = 2000 \times 1,08 = 2160$.
   $u_3 = u_2 \times 1,08 = 2160 \times 1,08 \approx 2333$
2. Exprimer u_{n+1} en fonction u_n pour tout entier $n \geqslant 1$.
   Augmenter de 8 % revient à multiplier par 1+0,08=1,08.
   $\boxed{\text{Donc pour tout } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 1,08 \times u_n}$
3. En déduire la nature de la suite (u_n) et préciser la raison et le premier terme.
   $\boxed{(u_n) \text{ est la suite géoémtrique de premier terme } u_1 = 2000 \text{ et de raison } 1,08.}$
4. Exprimer u_n en fonction de n.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ u_n = u_1 \times q^{n-1} = 2000 \times 1,08^{n-1}.}$
5. Calculer la production totale au cours des 20 premières semaines.
   $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = u_1 \times \dfrac{1-q^{20}}{1-q} = 2000\dfrac{1-1,08^{20}}{1-1,08} \approx 91524.$
   $\boxed{\text{L'entreprise produit 91524 systèmes durant les 20 premières semaines.}}$

Exercice 9 (5 points+1)

Le salaire net de Jeanne est de 1750 euros en janvier 2023. Chaque mois il augmente 7 de euros.

On appelle v_0 le salaire du mois de janvier 2023, v_1 le salaire du mois de février 2023 et pour tout $n \geqslant 0$, v_n le salaire du n^{e} mois après janvier 2023.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ v_{n+1} = v_n + 7.}$
2. Nature de la suite. Eléments caractéristiques.
   $\boxed{(v_n) \text{ est la suite arithmétique de premier terme } v_0 = 1750 \text{ et de raison } 7.}$
3. Exprimer v_n en fonction de n. Justifier.
   $\boxed{\text{Donc pour tout } n \geqslant 0,\ v_n = v_0 + nr = 1750 + 7n.}$
4. À quelle date le salaire de Jeanne dépassera-t-il pour la première fois 2000 euros ?
   $v_n \geqslant 2000$ ssi $1750 + 7n \geqslant 2000$ ssi $n \geqslant \dfrac{250}{7} \approx 35,7$.
   Le plus petit entier n qui convient est 36, ce qui correspond au mois de janvier 2026.
   En effet, $36 = 3 \times 12$.
   $\boxed{\text{Le salaire dépasse pour la première fois 2 000 euros en janvier 2026.}}$
5. Quelle somme totale percevra-t-elle comme salaire de janvier 2023 à décembre 2033 inclus ?
   La période janvier 2023 à décembre 2033 correspond à exactement 11 années, soit $11 \times 12 = 132$ mois.
   Il s'agit donc de calculer la somme des 132 premiers termes de la suite (v_n), de v_0 à v_{131}.
   $v_{131} = v_0 + 131r = 1750 + 131 \times 7 = 2667$.
   $$\begin{aligned} v_0 + v_1 + \cdots + v_{131} &= \frac{v_0 + v_{131}}{2} \times 132 \\ &= \frac{1750 + 2667}{2} \times 132 \\ &= 291\,522 \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{Le montant total des salaires accumulés sur la période janvier 2023-décembre 2033 est de 291 522 euros.}}$
6. Bonus : À partir de quelle date la somme totale des salaires dépasse-t-elle 300 000 euros ?
   Posons $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. On cherche le plus petit entier n tel que $S_n > 300000$.
   $$\begin{aligned} \frac{v_0 + v_n}{2} \times (n+1) &> 300000 \\ (1750 + 1750 + 7n)(n+1) &> 600000 \\ (7n + 3500)(n+1) &> 600000 \\ 7n^2 + 3507n + 3500 - 600000 &> 0 \\ 7n^2 + 3507n - 596500 &> 0 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3507^2 - 4 \times 7 \times (-596500) = 29001049 > 0$.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \approx -635,2$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \approx 134,2$.

Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines, ici $a = 7 > 0$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$7x^2+3507x-596500$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc le plus petit entier (naturel) n tel que $7n^2 + 3507n - 596500 > 0$ est 135.

$135 = 11 \times 12 + 3$. Le mois correspondant vient 11 ans et 3 mois après janvier 2023, c'est donc avril 2034.

La somme des salaires dépasse 300 000 euros pour la première fois en avril 2034.

Exercice 10 (5 points+1)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+6}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout $x \neq -3$, $f'(x) = \dfrac{20}{(2x+6)^2}$.

   En posant $u(x) = 3x-1$, et $v(x) = 2x+6$, les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et v s'annule pour $x = -3$.
   Donc, par quotient, f est dérivable en tout réel $x \neq -3$. On rappelle la dérivée d'un quotient de 2 fonctions, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.
   Pour tout $x \neq -3$,
   $f'(x) = \dfrac{3(2x+6)-(3x-1)\times 2}{(2x+6)^2} = \dfrac{6x+18-6x+2}{(2x+6)^2} = \dfrac{20}{(2x+6)^2}$.

2. Montrer qu'il existe deux points de $\mathscr{C}$ où la tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y = 20x+8$. Donner les abscisses de ces deux points (on ne demande pas leurs ordonnées).

   La tangente T_a est parallèle à cette droite ssi elle a le même coefficient directeur, 1. Comme $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente, on résout l'équation $f'(a) = 1$.
   $\dfrac{20}{(2x+6)^2} = 20$ ssi $(2x+6)^2 = 1$
   ssi $2x+6 = -\sqrt{1}$ ou $2x+6 = \sqrt{1}$
   ssi $2x = -6-1$ ou $2x = -6+1$
   ssi $x = -3,5$ ou $x = -2,5$.

   Il y a deux points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 20x+8$, ce sont les points d'abscisses $-3,5$ et $-2,5$.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse -1.

   $f(-1) = \dfrac{-4}{4} = -1$, et $f'(-1) = \dfrac{20}{4^2} = \dfrac{5}{4}$.
   $y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = \dfrac{5}{4}(x+1) - 1 = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{1}{4}$.

   $\boxed{T \text{ a pour équation } y = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{1}{4}.}$

4. Montrer que pour tout réel $x \neq -3$, $f(x) - \left(\dfrac{5}{4}x + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{-5(x+1)^2}{4(x+3)}$.

   $f(x) - \left(\dfrac{5}{4}x + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{3x-1}{2(x+3)} - \dfrac{5x+1}{4} = \dfrac{2(3x-1)-(5x+1)(x+3)}{4(x+3)}$
   $= \dfrac{6x-2-(5x^2+15x+x+3)}{4(x+1)} = \dfrac{-5x^2-10x-5}{4(x+3)}$
   $= \dfrac{-5(x^2+2x+1)}{4(x+3)} = \dfrac{-5(x+1)^2}{4(x+3)}$

5. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente T.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$-5/4$		$-$		$-$		$-$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-5(x+1)^2}{4(x+3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	

Ainsi, $f(x) - \left(\dfrac{5}{4}x + \dfrac{1}{4}\right) > 0$ ssi $x \in]-\infty;-3[$.

$\mathscr{C}$ est au-dessus de T sur $]-\infty;-3[$, et en dessous de T sur $]-3;+\infty[$.