

Chapitre 2 : Ensembles de nombres réels

Un peu d'histoire

- Apparition du zéro : vers 500 ans après J.-C.
- Nombres négatifs : ils sont connus en Chine au V^e siècle av. J.-C., mais il faut attendre le XVI^e siècle pour accepter les solutions négatives d'une équation (Albert Girard).
En France, le premier manuel qui traite des nombres négatifs date de 1886.
- Nombres décimaux : au XV^e siècle, Al-Kashi élabore une écriture décimale des nombres décimaux, reprise et généralisée par Simon Stevin au XVI^e siècle. Les nombres décimaux ne sont définitivement adoptés en France qu'en 1801 avec le système métrique.
- Nombres rationnels : 3000 ans av. J.-C., les Egyptiens utilisent des fractions avec 1 comme numérateur.
La notation avec un trait de fraction s'impose au XVII^e siècle.
- Nombres irrationnels : Au VI^e siècle av. J.-C., l'école pythagoricienne montre que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- La construction rigoureuse de \mathbb{R} est due à Dedekind et Cantor (XIX^e siècle).

I Sous-ensembles de \mathbb{R}

Notations

- Pour exprimer que A est l'ensemble formé par les nombres $-1, 2, 9$ et 12 , on utilise des accolades : $A = \{-1; 2; 9; 12\}$.
- Le nombre 2 appartient à A , on note $2 \in A$. 3 n'appartient pas à A , on note $3 \notin A$.
- Soit B l'ensemble $B = \{2; 12\}$. Comme tous les éléments de B sont dans A , on dit que B est inclus dans A et on note $B \subset A$.
- \mathbb{N} est l'ensemble des nombres entiers naturels. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots; 10\,000; \dots\}$.
- \mathbb{Z} est l'ensemble des entiers relatifs (positifs ou négatifs).
$$\mathbb{Z} = \{\dots; -10\,001; -10\,000; \dots; -1; 0; 1; 2; \dots; 10\,000; \dots\}$$

Remarque

Tout nombre entier naturel est aussi un entier relatif : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

I.1 L'ensemble \mathbb{D} des nombres décimaux

Définition

Un nombre est décimal s'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des nombres décimaux se note \mathbb{D} .

Exemple : $-2.34 \in \mathbb{D}$ car $-2,34 = \frac{-234}{10^2}$.

Remarque

Tout entier relatif est un nombre décimal. En effet, si $a \in \mathbb{Z}$, $a = \frac{a}{10^0}$. Ainsi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

Exercice 1

Montrer que les nombres suivants sont décimaux.

1. 6,1
2. $\frac{11}{20}$

Propriété (admise)

Un nombre est décimal ssi il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{2^m \times 5^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$.

Les nombres décimaux sont les nombres dont le développement décimal a un nombre fini de chiffres.

Définition

L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif est $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule ($1 \leq a < 10$), et n est un entier relatif (positif ou négatif).

Exemple : donner l'écriture scientifique des nombres suivants.

$$5\,430\,000 = \dots \qquad 0.062\,3 = \dots$$

I.2 L'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels

Définition

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs ($b \neq 0$). On note \mathbb{Q} l'ensemble des rationnels.

Exemple : $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.

Remarque

Tout nombre décimal est un nombre rationnel : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Propriété (admise)

Tout nombre rationnel peut s'écrire de façon unique sous la forme d'une fraction $\frac{p}{q}$ irréductible, c'est-à-dire avec $PGCD(p, q) = 1$.

Tous les nombres rationnels ont un développement décimal périodique à partir d'un certain rang.

Exemple :

les nombres suivants sont rationnels.

$$\frac{5}{4} = 1,25 = 1,250000\dots, \frac{1}{3} = 0,3333\dots, 6 = 6,000\dots, \frac{19}{33} = 0,57575757\dots$$

Remarque

Parmi les nombres rationnels, il y a :

- les nombres décimaux qui ont un développement décimal fini.
- et les nombres rationnels qui ne sont pas décimaux. Ceux-ci ont un développement décimal infini mais avec une période.

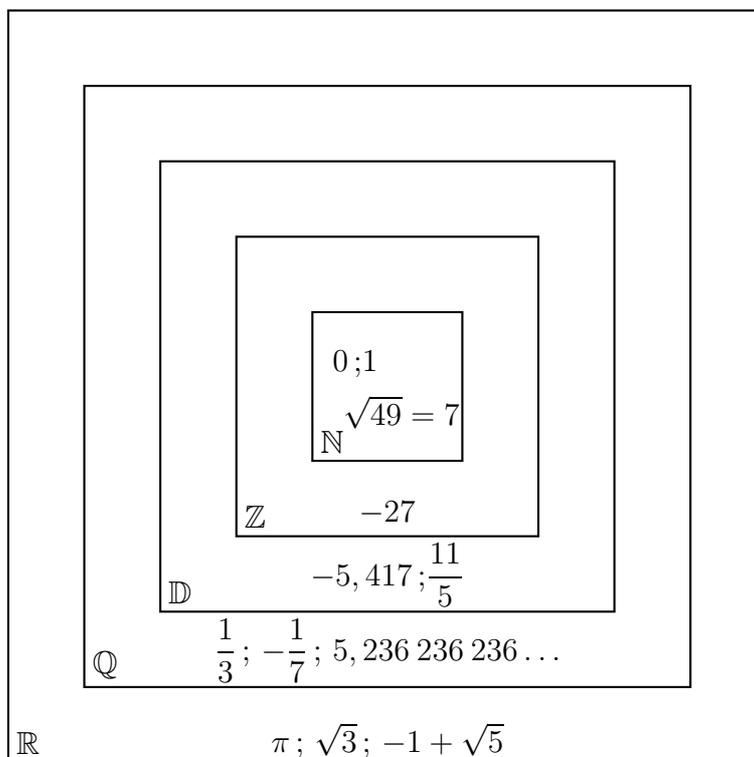
Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels (irrationnels), comme par exemple $\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) ou π (périmètre d'un cercle de diamètre 1).

Les nombres irrationnels ont un développement décimal infini non périodique.

On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels, il contient les nombres rationnels et les irrationnels.

I.2.a Synthèse

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Exercice 2

Placer sur le schéma les nombres suivants : $-\frac{3}{4}$; $-\sqrt{36}$; $6,21$; $\frac{2}{15}$; $\frac{6}{25}$.

Exercice 3

Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. Raisonner par l'absurde.

II Encadrement et approximation de réels par des nombres décimaux

Définition

Un encadrement décimal d'un nombre réel x est une écriture $a \leq x \leq b$ où a et b sont des nombres décimaux.

L'amplitude de l'encadrement est la différence $b - a$.

Exemple :

$$\sqrt{3} \approx 1,732\,051.$$

Un encadrement décimal de $\sqrt{3}$ d'amplitude 10^{-2} est $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'arrondi à 10^{-n} près du réel x est le nombre décimal à n chiffres après la virgule le plus proche de x .

Exemple :

$\pi \approx 3,141\,592\,654$.

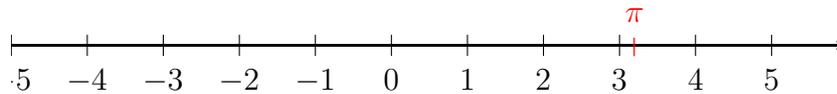
L'arrondi de π à 10^{-2} est

L'arrondi de π à 10^{-3} est

III Intervalles de l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels

III.1 La droite graduée

L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels est l'ensemble de tous les nombres connus en seconde. Il contient les rationnels, ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$), et les nombres irrationnels comme par exemple π ou $\sqrt{2}$. On représente l'ensemble des nombres réels par une droite graduée. A chaque point de cette droite correspond un unique nombre réel, et réciproquement.

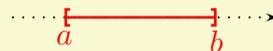


III.2 Intervalles de \mathbb{R}

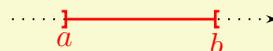
Définition (Intervalles bornés)

Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$.

L'intervalle fermé $[a; b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$.



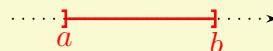
L'intervalle ouvert $]a; b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$.



L'intervalle $[a; b[$ (fermé en a , ouvert en b) est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$.



L'intervalle $]a; b]$ (ouvert en a , fermé en b) est l'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$.



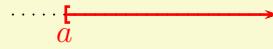
Remarque

Le symbole mathématique pour l'infini est ∞ .

Définition (Intervalles non bornés)

Soit $a \in \mathbb{R}$.

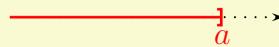
L'intervalle fermé $[a; +\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x \geq a$.



L'intervalle ouvert $]a; +\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x > a$.



L'intervalle fermé $] - \infty; a]$ est l'ensemble des réels x tels que $x \leq a$.



L'intervalle ouvert $] - \infty; a[$ est l'ensemble des réels x tels que $x < a$.



Exemple :

Inégalité	Intervalle	Représentation sur la droite graduée
$-3 \leq x \leq 2$	$[-3; 2]$	
$-5 \leq x < 3$	$[-5; 3[$	
$x < 2$	$] - \infty; 2[$	
$x \geq -5$	$[-5; +\infty[$	

Remarque

On ouvre toujours les crochets pour $+\infty$ et $-\infty$.

\mathbb{R} est un intervalle, il s'écrit $\mathbb{R} =] - \infty; +\infty[$.

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle.

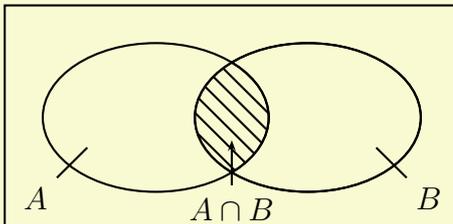
1. $9x + 7 \leq 2x - 11$
2. $-6x + 4 > x + 9$
3. $2 - x < 7x + 9$
4. $\frac{2x + 1}{3} < x - 4$
5. $\frac{2}{7}x - 1 > x + \frac{5}{3}$

III.3 Intersection et réunion

Définition

1. Intersection de deux ensembles.

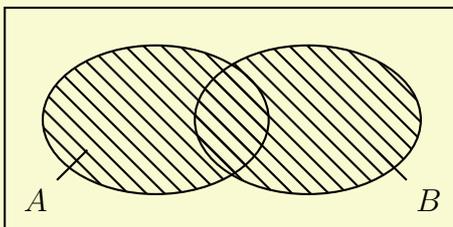
L'intersection de deux ensembles est l'ensemble des éléments communs aux deux ensembles.



$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$$

2. Réunion de deux ensembles.

La réunion de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant à au moins l'un des deux ensembles.



$A \cup B$ est la partie hachurée.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Exercice 5

Traduire à l'aide d'intervalles les conditions suivantes :

- a) $x > 1$
- b) $x < 2$ et $x \geq -5$
- c) $x < 0$ ou $x \leq 2$
- d) $-3 < x \leq 1$

Exercice 6

Écrire plus simplement les ensembles suivants :

- a) $] - 4; 5[\cap [1; 10]$.
- b) $[-\infty; 2[\cup] - 1; 3]$
- c) $[1; 4] \cap [6; 7]$
- d) $] - \infty; -3] \cup] - 5; +\infty[$
- e) $[4; 12[\cup] - 3; 15[$

Remarque

Notations particulières :

$$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[.$$

$$\mathbb{R}_- =] - \infty; 0].$$

$$\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[.$$

$$\mathbb{R}_-^* =] - \infty; 0[.$$

$$\mathbb{R}^* =] - \infty; 0[\cup]0; +\infty[.$$

IV Valeur absolue

IV.1 Valeur absolue d'un réel

Définition

Soit x un nombre réel. Notons M l'image de x sur la droite graduée réelle. La valeur absolue de x , notée $|x|$, est la distance OM , aussi appelée distance de x à 0.

$$|x| = d(x; 0)$$

Exemple : $|5| = 5$. $|-3| = 3$

Propriété

Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$.

Si $x < 0$ alors $|x| = -x$.

Remarque

Une valeur absolue est toujours positive ou nulle.

Deux nombres opposés ont la même valeur absolue : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |-x|$.

Exercice 7

Calculer :

1. $a = |4 - 7|$

2. $b = |7 - 4|$

3. $c = 4 - 3|1 - 8|$

4. $d = 2 \times |-3| + \frac{1}{2} \times |5|$.

IV.2 Distance et valeur absolue

Propriété

Soient a et b deux nombres réels d'images respectives A et B sur l'axe réel. Alors,

$$AB = d(a; b) = |b - a| = |a - b|$$

Remarque

Par abus de langage, on parle parfois de la distance entre les réels a et b . Alors, $d(a; b) = |a - b|$.

Remarque

Soient a un nombre réel et $r > 0$.

L'ensemble des réels x tels que $|x - a| \leq r$ est l'intervalle $[a - r; a + r]$.