Exercices sur le produit scalaire

Correction

Exercice 1 (34 page 219)

$ABCD$ est un rectangle, avec $AB = 5$ et $AD = 2$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= 0 + AB^2 - BC \times DA + 0 \\
&= 5^2 - 2^2 \\
&= 25 - 4 \\
&= 21
\end{aligned}$$

Exercice 2 (35 page 219)

ABC est un triangle, avec H le pied de la hauteur issue de A. On a $AB = 3$, $BC = 5$, et $HC = 3$ ($H \in [BC]$).

1.
$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HC} \\
&= HC^2 + BC \times HC \\
&= 3^2 + 5 \times 3 \\
&= 24
\end{aligned}$$

2. Calcul de AH.
D'après le théorème de Pythagore dans ABH rectangle en H,
$AB^2 = AH^2 + BH^2$, soit $AH^2 = 9 - 4 = 5$, et $AH = \sqrt{5}$.

3.
$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= AB^2 + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} \\
&= AB^2 + AH^2 \\
&= 3^2 + (\sqrt{5})^2 \\
&= 14
\end{aligned}$$

Exercice 3 (61 page 221)
En repère orthonormé, on a $A(4;0)$, $B(-2;1)$ et $C(5;6)$.

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, donc $\overrightarrow{AB}(-6;1)$, et $\overrightarrow{AC}(1;6)$.
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = xx' + yy' = -6 \times 1 + 1 \times 6 = 0$.
2. Nature du triangle ABC.
   Donc $(AB) \perp (AC)$, ABC est rectangle en A.

Exercice 4 (83 page 226)
En repèr eorthonormé, $A(2;4)$ et $B(-2;2)$. Le point C appartient à la droite d'équation $y = x$. Notons $C(x;x)$.
$\overrightarrow{AB}(-4;-2)$, et $\overrightarrow{AC}(x-2;x-4)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ssi "$xx + yy' = 0$"
ssi $-4(x-2) - 2(x-4) = 0$
ssi $-4x + 8 - 2x + 8 = 0$
ssi $-6x + 16 = 0$
ssi $x = \dfrac{8}{3}$.
Ainsi, les coordonnées du point C sont $\left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$.

Exercice 5 (85page 227)
Soit $ABCD$ un parallélogramme (quelconque).

1. Montrons que $AB^2 - AD^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AB^2 - AD^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= AB^2 - AD^2 \end{aligned}$$
   En effet, comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
2. Conséquence pour un parallélogramme qui a les diagonales perpendiculaires.
   D'après 1), si $(AC) \perp (DB)$, alors $AB^2 - AD^2 = 0$, soit $AB = AD$. (AB, AD sont positifs, ce sont des longueurs)

Un tel parallélogramme a donc deux consécutifs de même longueur.
Ainsi, $ABCD$ a ses 4 côtés de même longueur, et $ABCD$ est un losange.