

1G. Correction de l'interrogation n° 9

Exercice 1 (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x + 1)e^x$.

1. Calculer $f'(x)$.

Dérivée d'un produit de fonctions : $(u \times v)' = u'v + uv'$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6e^x + (6x + 1)e^x = e^x(6x + 7)$.

2. Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Comme $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ a le même signe que $6x + 7$.

$6x + 7 > 0$ ssi $x > -\frac{7}{6}$.

Image de $-\frac{7}{6}$: $f(-\frac{7}{6}) = (6 \times \frac{-7}{6} + 1)e^{-7/6} = -6e^{-7/6}$

x	$-\infty$	$-7/6$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Exercice 2 (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x-5}{2e^x}$.

1. Calculer $f'(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc le dénominateur ne s'annule pas.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1 \times (2e^x) - (x-5) \times 2e^x}{(2e^x)^2} = \frac{2e^x(1-x+5)}{(2e^x)^2} = \frac{6-x}{2e^x}.$$

2. Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Comme $2 > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $6 - x$.

$6 - x = 0$ ssi $x = 6$, et $6 - x$ est une expression de fonction affine avec $a = -1 < 0$.

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

$$f(6) = \frac{6-5}{2e^6} = \frac{1}{2e^6} = \frac{e^{-6}}{2}$$

Exercice 3 (1 point)

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = -3$.

$$1. (-2\vec{u}) \cdot (4\vec{v}) = -2 \times 4 \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = -8 \times 4 = -32.$$

$$2. (\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} = 4 - (-3) = 7.$$

Exercice 4 (5 points)

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. Justifier.

1. ABC est un triangle rectangle en A , $AB = 2$, $BC = 3$.

Comme $\vec{AB} \perp \vec{AC}$, $\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0.}$

2. ABC est un triangle isocèle rectangle en C , et de base $AB = 6$.

Soit C' le projeté orthogonal de C sur (AB) .

Comme ABC est isocèle en C , la hauteur issue de C est aussi une médiane, donc C' est le milieu de $[AB]$.

D'après la formule du projeté,

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AC'} = AB \times \frac{1}{2}AB = 6 \times \frac{6}{2} = 18$$

$$\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 18.}$$

3. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, $A(-5; 2)$, $B(-2; -1)$ et $C(4; 0)$.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}, \text{ donc } \vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad \text{De même, } \vec{AC} \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

D'après l'expression du produit scalaire en repère orthonormé :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = xx' + yy' = 3 \times 9 - 3 \times (-2) = 33.$$

$$\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 33.}$$

4. $AB = 6$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.

D'après la formule du cosinus,

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 7 \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 7 \times 6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 21\sqrt{3}$$

$$\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 21\sqrt{3}.}$$

Exercice 5 (2 points)

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2;3)$, $B(-4;2)$, $C(1;-1)$, et $D(5-a;a)$ où a est un nombre réel. Déterminer a pour que les droites (AB) et (CD) soient perpendiculaires.

$(AB) \perp (CD)$ ssi $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}, \text{ soit } \vec{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De même, } \vec{CD} \begin{pmatrix} 4-a \\ a+1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \vec{AB} \cdot \vec{CD} = xx' + yy' = -6(4-a) + (-1) \times (a+1)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -24 + 6a - a - 1 = 5a - 25.$$

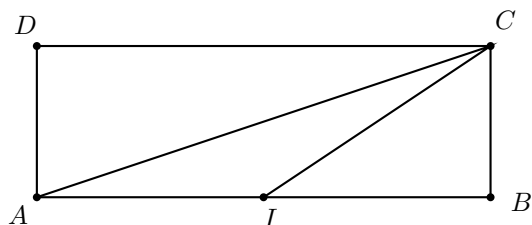
Ainsi, $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ ssi $5a - 25 = 0$ ssi $a = 5$.

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $a = 5$, soit $D(0;5)$.

Exercice 6 (6 points)

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 2$.

On note I le milieu de $[AB]$.



1. Calculer, en justifiant la réponse, les produits scalaires :

$$\vec{AC} \cdot \vec{CB}$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{BD}.$$

On raisonne par projeté orthogonal dans les deux cas.

$$\vec{AC} \cdot \vec{CB} = \vec{BC} \cdot \vec{CB} = -BC^2 = -2^2 = -4$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{BD} = \vec{DC} \cdot \vec{CD} = -DC^2 = -6^2 = -36$$

2. (a) Justifier que $\vec{CA} \cdot \vec{CI} = 22$.

Par relation de Chasles et linéarité,

$$\begin{aligned} \vec{CA} \cdot \vec{CI} &= (\vec{CD} + \vec{DA}) \cdot (\vec{CB} + \vec{BI}) \\ &= \vec{CD} \cdot \vec{CB} + \vec{CD} \cdot \vec{BI} + \vec{DA} \cdot \vec{CB} + \vec{DA} \cdot \vec{BI} \\ &= 0 + CD \times BI + DA \times CB + 0 \\ &= 6 \times 3 + 2 \times 2 \\ &= 22 \end{aligned}$$

- (b) En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{ACI})$ puis la mesure de l'angle $\widehat{ACI}$ à un degré près.

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles BCI et BCA , on calcule les longueurs CI et CA .

$$CI^2 = CB^2 + BI^2 = 2^2 + 3^2 = 13, \text{ donc } CI = \sqrt{13}.$$

$$CA^2 = CB^2 + BA^2 = 2^2 + 6^2 = 40, \text{ donc } CA = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

D'après la formule du cosinus,

$$\vec{CA} \cdot \vec{CI} = CA \times CI \times \cos(\widehat{ACI}).$$

$$\text{Donc } 22 = \sqrt{13} \times 2\sqrt{10} \times \cos(\widehat{ACI})$$

$$\cos(\widehat{ACI}) = \frac{22}{\sqrt{13} \times 2\sqrt{10}} = \frac{11\sqrt{130}}{130}.$$

Avec la calculatrice, $\widehat{ACI} \approx 15$ degrés.

Exercice 7 (bonus, 1 point)

On traitera, au choix, une seule des deux questions suivantes

1. Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $BC = 3$, et $AC = 6$.

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

Par la relation de Chasles sur les vecteurs, $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$.

D'après une formule du produit scalaire avec les normes,

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \frac{1}{2} (||\vec{AB}||^2 + ||\vec{AC}||^2 - ||\vec{AB} - \vec{AC}||^2) \\ &= \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - ||\vec{CB}||^2) \\ &= \frac{1}{2} (16 + 36 - 9) \\ &= \frac{43}{2} \end{aligned}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 21.5.$$

2. Soit $ABCD$ un losange de centre O , tel que $AC = 6$ et $BD = 14$.

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

On procède par relation de Chasles et linéarité.

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AD} &= (\vec{AO} + \vec{OB}) \cdot (\vec{AO} + \vec{OD}) \\ &= \vec{AO} \cdot \vec{AO} + \vec{AO} \cdot \vec{OD} + \vec{OB} \cdot \vec{AO} + \vec{OB} \cdot \vec{OD} \\ &= AO^2 + 0 + 0 - OB^2 \\ &= 3^2 - 7^2 \\ &= 9 - 49 \\ &= -40 \end{aligned}$$