Chapitre 3 : Vecteurs et repérage dans le plan
(Première partie)

I Vecteur et translation

Définition
Soient A et B deux points du plan.
La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (qui transforme A en B) est la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que les segments $[AM']$ et $[BM]$ aient le même milieu.
Autrement dit, le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

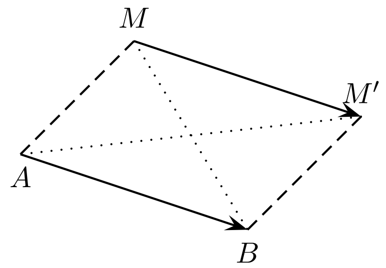
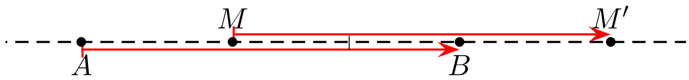
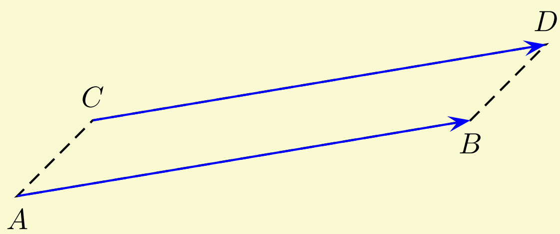


Illustration dans le cas où $M \in (AB)$:



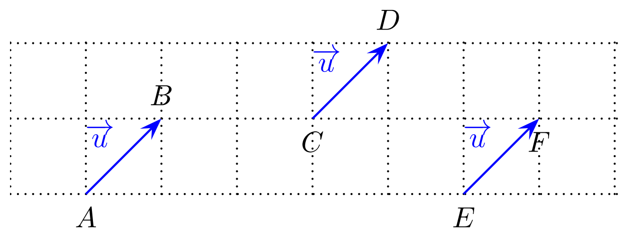
Définition (Vecteurs égaux)
Soient A, B, C, D quatre points du plan.
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsque la translation qui envoie A en B envoie aussi C en D.
Lorsqu'il est défini, cela revient à dire que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.
On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Lorsque $A \neq B$ et $C \neq D$, on a l'équivalence :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ si et seulement si } ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$

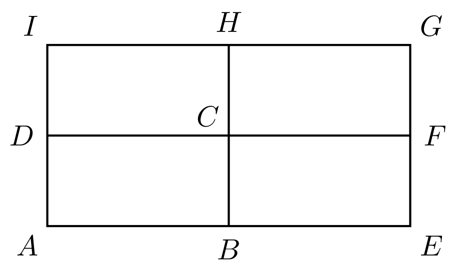
Remarque
1. Attention à l'ordre des points en nommant le parallélogramme.
   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
2. On peut représenter un même vecteur n'importe où dans le plan.
   Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, on peut dire que ces vecteurs sont des représentants d'un même vecteur $\overrightarrow{u}$.



3. Si $A = B$, (les points A et B sont confondus), la translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$ laisse chaque point du plan invariant.
   On dit que le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, et on note $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 1
Lister dans la figure tous les vecteurs égaux au vecteur donné.

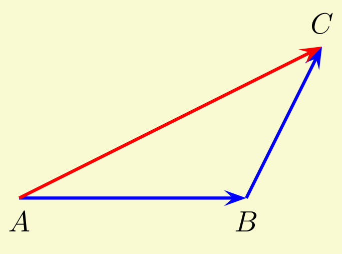
1. $\overrightarrow{AB} = \ldots$
2. $\overrightarrow{AD} = \ldots$
3. $\overrightarrow{IC} = \ldots$



II Addition de vecteurs

Théorème (et définition)
Soient A, B et C trois points du plan.

Appliquer successivement la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ revient à appliquer la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.



On définit l'addition entre les vecteurs par la relation de Chasles :

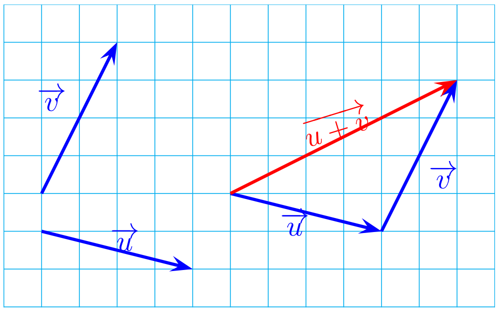
$$\boxed{\text{pour tous points } A,\ B \text{ et } C \text{ du plan, } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

Exercice 2
Étudier dans chaque cas si l'on appliquer la relation de Chasles. Si oui, le faire.

1. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$
3. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$
4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DA}$

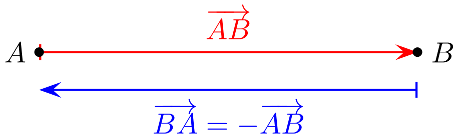
Remarque

1. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
   Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, on place les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ bout à bout.



2. L'addition sur les vecteurs est commutative.
   Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$.
3. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$.
   On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés, et on note

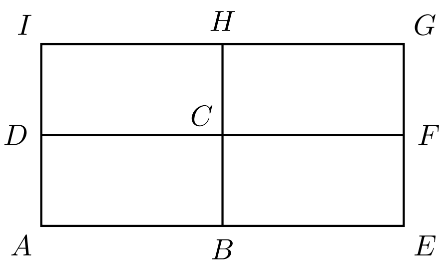
$$\boxed{\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}.}$$



Exercice 3

On reprend la figure de l'exercice 1. Simplifier les sommes de vecteurs suivantes.

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DH}$
2. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$
3. $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AD}$
4. $\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{FB}$
5. $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{AE}$
6. $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{GF}$
7. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{IC}$



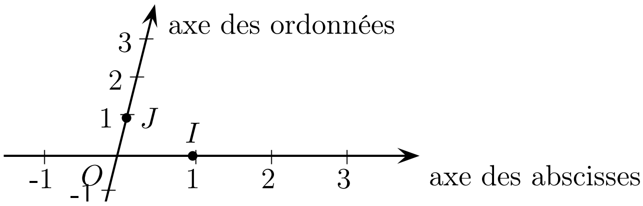
Remarque

On peut caractériser le milieu d'un segment avec des vecteurs :

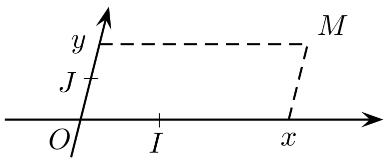
$$\begin{aligned} I \text{ est le milieu de } [AB] &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0} \end{aligned}$$

III Repèrage dans le plan

Définition
On définit un repère du plan par la donnée de 3 points non alignés O, I et J. Le repère se note $(O; I; J)$.
O est l'origine du repère, la droite (OI) est l'axe des abscisses, la droite (OJ) est l'axe des ordonnées.



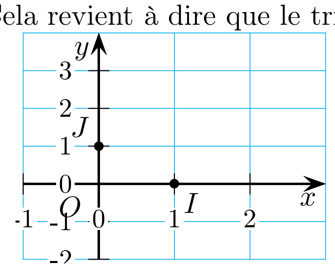
Définition (et propriété admise)
Dans un repère du plan $(O; I; J)$, tout point M est déterminé par un unique couple de réels $(x; y)$.
x est l'abscisse de M, et y est l'ordonnée de M.
On lit les coordonnées du point en traçant des parallèles aux axes du repère.



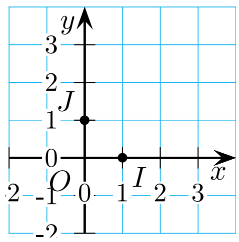
Exercice 4

1. Construire un parallélogramme $ABCD$.
2. On se place dans le repère $(A; B; D)$. Donner les coordonnées des points A, B, C et D.
3. Placer le point E de coordonnées $(-1; 2)$ dans le repère $(A; B; D)$.

Remarque (cas particuliers)
Le repère est orthogonal lorsque les axes du repère sont perpendiculaires : $(OI) \perp (OJ)$ (le triangle OIJ est rectangle en O).
Le repère est orthonormé si les axes sont perpendiculaires et si l'on a la même unité de longueur sur les deux axes : $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$.
Cela revient à dire que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.



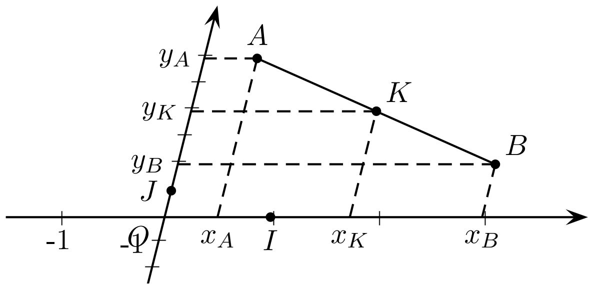
Repère orthogonal :
$(OI) \perp (OJ)$.



Repère orthonormé :
$(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$

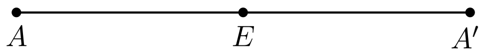
Propriété (coordonnées du milieu d'un segment)
Dans un repère du plan, on considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, avec x_A, y_A, x_B, y_B réels.
Les coordonnées du milieu K du segment $[AB]$ sont données par :

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$



Remarque (Symétrique par une symétrie centrale)
La propriété des coordonnées du milieu peut également servir à déterminer les coordonnées d'un point symétrique par une symétrie centrale.

$$(A' \text{ est le symétrique de } A \text{ par rapport à } E) \text{ équivaut à } (E \text{ est le milieu de } [AA']).$$

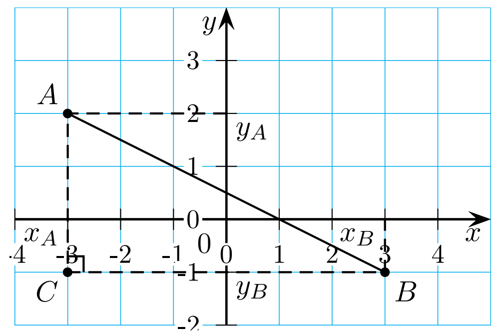


Exercice 5

1. Dans un repère du plan, placer les points $A(-2;-1)$, $B(-4;7)$ et $E(3;1)$.
2. Calculer les coordonnées du milieu K de $[AB]$, puis placer K.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées du symétrique A' de A par rapport à E, puis placer A' sur la figure.

Propriété (distance entre deux points)
On se place dans un repère **orthonormé** du plan.
Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points (x_A, y_A, x_B, y_B réels).
La distance AB (longueur du segment $[AB]$) est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Démonstration
On se place dans le cas où $x_A < x_B$ et $y_A > y_B$ (voir ci-dessus).
Soit C le point qui a la même abscisse que A et la même ordonnée que B.
Comme le repère est orthonormé, le triangle ABC est rectangle en C.
D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = BC^2 + AC^2$.
Or, $BC = x_B - x_A$ et $AC = y_A - y_B$.
Donc

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2 \\ AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2} \end{aligned}$$

En effet, $(y_A - y_B)^2 = (y_B - y_A)^2$ (deux nombres opposés ont le même carré).
Les autres cas se montrent de façon analogue. □

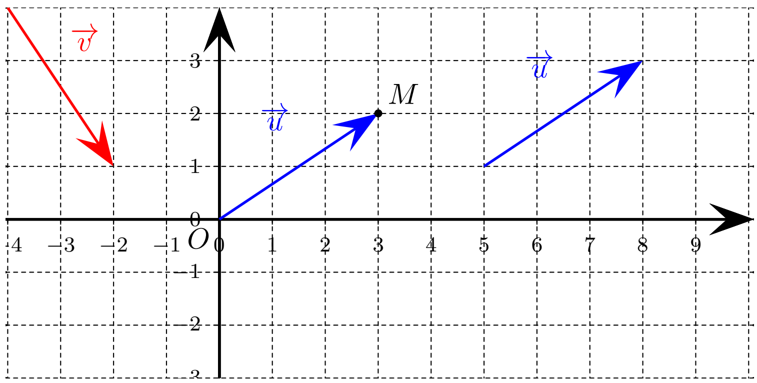
Exercice 6

1. Placer dans un repère orthonormé les points $A(-2;1)$, $B(4;-1)$ et $C(-1;4)$.
2. Calculer les longueurs AB, AC, et BC.
3. En déduire la nature du triangle ABC.

IV Coordonnées d'un vecteur

Définition
Soient $(O;I;J)$ un repère du plan, et $\vec{u}$ un vecteur.
Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Illustration : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.



Remarque
Les coordonnées d'un vecteur traduisent les variations en abscisses et en ordonnées entre le point de départ et son extrêmité.
On note les coordonnées d'un vecteur en colonne.

Exercice 7

1. Lire les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ représenté. $\vec{v}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$
2. Représenter ci-dessus les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

Propriété
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.
Alors,

1. $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si ($x = x'$ et $y = y'$).
   Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.
2. Le vecteur $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$.
3. Le vecteur $\overrightarrow{u+v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Propriété
Dans un repère du plan, soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points.
Alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$.

Démonstration
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Il suffit de passer aux coordonnées dans cette relation pour obtenir les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$. □

Exercice 8
Dans un repère du plan, on donne $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ et $A(1;-4)$.

Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$.

Exercice 9
Dans un repère du plan, on donne $A(-4;1)$, $B(-1;0)$, $C(1;2)$.
Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Propriété (et définition, admise)
Dans un repère **orthonormé** du plan, on considère les points $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, et le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

1. La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est le réel positif noté $||\overrightarrow{u}||$ défini par $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$.
   Si M est le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$, la norme de $\overrightarrow{u}$ est la longueur du segment $[OM]$:
   $$||\overrightarrow{u}|| = OM = \sqrt{x^2+y^2}.$$
2. Rappel.
   La distance AB est donnée par
   $$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$