Exercices sur les matrices

Exercice 1
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -7 \\ 8 & 9 & -3 \end{pmatrix}$. Donner les coefficients $a_{1,2}$; $a_{2,1}$; $a_{3,2}$; $a_{2,3}$

Exercice 2
Écrire explicitement les matrices.

1. $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3 \\ 1\leqslant j\leqslant 2}}$ où $a_{i,j} = i + j$
2. $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3 \\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$ où $b_{i,j} = 3i - j^2$
3. $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2 \\ 1\leqslant j\leqslant 2}}$ où $c_{i,j} = 5i(2 + j)$

Exercice 3
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1-x & 2+y & 3 \\ 0 & 4 & 3z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.
Étudier s'il existe des réels x, y et z tels que $A = B$.

Exercice 4
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer les matrices $A + B$, $3A$, $-B$, et $3A - B$.

Exercice 5
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = I_3$, et $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.
Calculer la matrice $M = 2A - 3B + C$. Vérifier à l'aide d'un outil numérique.

Exercice 6
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB, puis BA.
2. A-t-on $AB = BA$?

Exercice 7
Proposer deux matrices A et B carrées d'ordre 2 non nulles telles que $A \times B = 0$.

Exercice 8
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer A^2, et A^3.

Exercice 9
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, et A^3.
2. En déduire A^n pour tout $n \geqslant 3$.

Exercice 10
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, et A^3.
2. En déduire A^n pour tout $n \geqslant 3$.

Remarque : on dit que A est nilpotente.

Exercice 11
On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, et $N = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer MN et NM.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercices sur les matrices – Fiche n$^{\text{o}}$ 2

Exercice 1
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que B est l'inverse de A.

Exercice 2
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 - 3A + 2I = 0$ où I est matrice identité d'ordre 3.
2. En déduire que $A\left(-\dfrac{1}{2}A + \dfrac{3}{2}I\right) = I$
3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 3
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$ où I_3 est matrice identité d'ordre 3.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 4
On se propose de résoudre le système $\begin{cases} -4x + y + 0,1z &= 1 \\ 11x - 3y - 0,2z &= 1 \\ -6x + 2y + 0,1z &= 2 \end{cases}$.

1. Vérifier que le système équivaut à $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0,1 \\ 11 & -3 & -0,2 \\ -6 & 2 & 0,1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. Calculer A^{-1} à l'aide de la calculatrice.
3. En déduire la résolution du système.

Exercice 5
En utilisant des matrices, résoudre le système $\begin{cases} 3x + 2y + z &= 14 \\ 2x - y + z &= 21 \\ x + 3y + 2z &= 7 \end{cases}$.

Exercice 6
En utilisant des matrices, résoudre le système $\begin{cases} x = 2 - 3y - 2z \\ 4y = -x - 3z + 3 \\ 2x + 7y + 6z = 8 \end{cases}$.

Exercice 7
L'inventaire des téléphones *Aïefone 238* et *gale-à-scie A9000*, en stock dans 3 points de vente de la grande chaîne *Patissier*, est donné par la matrice $M = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 17 & 15 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$ où les lignes indiquent le nombre de téléphones disponibles dans chacun des trois points de vente.
Le prix de vente du *Aïefone 238* est de 999 euros,et celui du *gale-à-scie A9000* est de 555 euros.
On pose $N = \begin{pmatrix} 999 \\ 555 \end{pmatrix}$

1. Calculer le produit $P = MN$.
2. Que représente la matrice P ?

Exercice 8
Pour rejoindre leur spot de surf à Lacanau, trois amis (Ulrich, Manolo et Jules) passent chacun un certain temps (en heures) dans différents moyens de transports conformément au tableau ci-dessous.

	Avion	Train	Voiture
Ulrich	0	6	1,5
Manolo	1,5	0	0,3
Jules	1	1	0,1

La matrice T représente les temps du tableau et la matrice colonne V la vitesse moyenne (en km·h^{-1}) de chaque moyen de transport (de haut en bas : avion, train, voiture).

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1,5 \\ 1,5 & 0 & 0,3 \\ 1 & 1 & 0,1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 750 \\ 210 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit $D = TV$.
2. Que représente la matrice D ?
3. Le tableau ci-contre donne l'impact CO^2 (en kg) et le prix (en euros) pour une heure passée dans chaque moyen de transport.

	Impact CO^2	Prix
Avion	111	172,5
Train	0,546	3,6
Voiture	1,035	5,4

   (a) À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer l'impact et le prix du trajet pour chacun des amis.
   (b) Qui a fait le trajet le plus économique ? le plus écologique ?

Exercice 9
Une entreprise fabrique des jouets en bois qui nécessitent pour :
— un camion : 2kg de bois et 3h de travail.
— un pantin : 500g de bois et 4h de travail.
— un puzzle : 800g de bois et 3h30 de travail.
L'entreprise produit 89 jouets au total en utilisant exactement 91kg de bois et 313h de travail.
Déterminer le nombre de camions, de pantins et de puzzles fabriqués par l'entreprise.