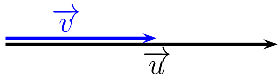
# Chapitre 11 : Produit scalaire dans le plan

## I Définition

Rappel :
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $||\overrightarrow{AB}||$, est la distance $AB$.

**Définition (vecteurs colinéaires)**
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont même sens, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraires, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|$.



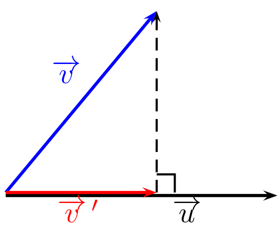


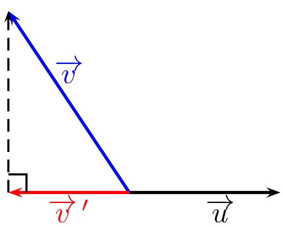
**Remarque**
Le produit $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$ est parfois noté $\overrightarrow{u}^{\,2}$. On a donc $\overrightarrow{u}^{\,2} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

**Définition (cas général)**
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ des vecteurs non nuls, et $\overrightarrow{v}\,'$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$. Alors,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\,'$$

Lorsque $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est le vecteur nul, on pose $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.



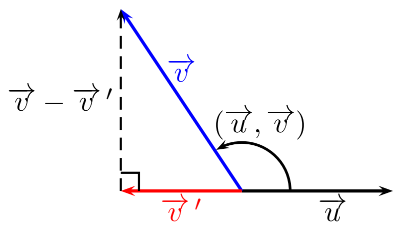

**Exercice 1**
Formule du projeté orthogonal
Représenter un vecteur connaissant son produit scalaire avec un vecteur donné : ressource 450

## II Autres expressions du produit scalaire

### II.1 La formule du cosinus

**Théorème**
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$$




**Remarque**
Comme $\cos(-x) = \cos(x)$, on peut utiliser la mesure d'un angle géométrique à la place de celle de l'angle orienté correspondant dans la formule du cosinus.
Par exemple, soit $ABC$ un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 4$, et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.
alors $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{6}$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 5 \times 4 \times \cos(-\dfrac{\pi}{6}) = 5 \times 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.
Ou bien
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 5 \times 4 \times \cos(\dfrac{\pi}{6}) = 5 \times 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

**Exercice 2**
Appliquer la formule du cosinus : ressource 363

## II.2 Expression en repère orthonormé

**Théorème (Expression dans un repère orthonormé)**
Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de coordonnées $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

**Corollaire (Lien entre distance et produit scalaire)**
1. $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\,^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$. D'où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Distance entre deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ :
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**Démonstration**
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. □

**Exercice 3**
1. Utiliser l'expression du produit scalaire en repère orthonormé : ressource 572
2. Déterminer le produit scalaire de 2 vecteurs représentés dans un quadrillage : ressource 451
3. Déterminer une coordonnée d'un vecteur orthogonal à un autre vecteur : ressource 361

## II.3 Expression avec les normes

**Théorème (Expressions à l'aide des normes)**
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

## III Propriétés du produit scalaire

**Propriété**
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs quelconques, et $k$ un nombre réel.

1. Symétrie.
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$
2. Linéarité (et même bilinéarité avec la symétrie).
   - $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$.
   - $(k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k \times (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k \times (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$.

Ces deux derniers points traduisent la bilinéarité du produit scalaire.
On notera l'analogie avec les règles de calcul sur le produit des nombres réels.

**Définition (Vecteurs orthogonaux)**
Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
Le vecteur nul est considéré orthogonal à tout vecteur.

**Propriété**
Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

**Remarque**
L'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ se traduit de façon analytique par :
$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad xx' + yy' = 0$$

**Propriété (Identités remarquables)**
1. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
2. $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$

**Remarque**
On reconnaît dans les deux premières identités les expressions du produit scalaire avec les normes, il suffit d'isoler $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ pour s'en convaincre.