# Chapitre 6 : Puissances et racines carrées

## I Puissances entières relatives

**Définition**
Soient $a$ un nombre réel et $n$ un entier naturel.
On pose $a^0 = 1$ ($a$ non nul), et $a^1 = a$.
Pour tout $n \geqslant 2$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$, (lire "$a$ puissance $n$")
Lorsque $a \neq 0$, et $n \geqslant 1$, $a^{-n}$ est l'inverse de $a^n$ : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

**Exercice 1 (calcul mental)**
Calculer à l'aide de la définition :

1. $(-5)^0 =$ $\quad 1,4^1 =$ $\quad 2^5 =$
2. $(\sqrt{3})^4 =$ $\quad 5^{-1} =$ $\quad (-2)^3 =$
3. $10^{-4} =$ $\quad 2^{-3} =$ $\quad (\sqrt{2})^{-4} =$

**Propriété**
Soient $a$ un nombre réel non nul et $n$ et $p$ des entiers relatifs.

1. $a^n \times a^p = a^{n+p}$
2. $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
3. $(a^n)^p = a^{n \times p}$

Exemple :
$3^8 \times 3^{-4} =$
$\dfrac{5^7}{5^{-1}} =$
$\left(\sqrt{2}^3\right)^2 =$

**Propriété**
Soient $a$ et $b$ des nombres réels non nuls et $n$ un entier relatif.
Alors $a^n \times b^n = (ab)^n$ et $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

Exemple :
$\dfrac{205^{-3}}{20,5^{-3}} =$

**Définition**
L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif est $a \times 10^n$ où $a$ est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule ($1 \leqslant a < 10$), et $n$ est un entier relatif (positif ou négatif).

Exemple : donner l'écriture scientifique des nombres suivants.
$5\,430\,000 = \dots$ $\qquad$ $0,062\,3 = \dots$

## II Racines carrées

**Définition**
Soit $a$ un nombre réel positif ou nul.
La racine carrée de $a$, notée $\sqrt{a}$ est le nombre réel positif dont le carré est $a$.
Ainsi, $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\sqrt{a}^2 = a$.

Exemple :

$\sqrt{9} =$ $\qquad$ $\sqrt{0} =$ $\qquad$ $\sqrt{1} =$ $\qquad$ $\sqrt{\dfrac{1}{4}} =$

**Propriété**
Soient $a$ et $b$ des nombres réels positifs ou nuls.

1. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
2. Si de plus $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

**Démonstration**
D'une part, $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 =$
D'autre part, $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 =$
...
...

**Exercice 2 (simplification de racines carrées)**
Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a$ et $b$ sont des entiers, $b$ étant le plus petit possible.

1. $a = \sqrt{8} = \dots$
2. $b = \sqrt{75} = \dots$
3. $c = \sqrt{12} = \dots$
4. $d = \sqrt{20} = \dots$
5. $e = \sqrt{48} = \dots$

6. $f = \sqrt{27} =$ ..........................................................
7. $g = \sqrt{72} =$ ..........................................................
8. $h = \sqrt{18} =$ ..........................................................
9. $i = \sqrt{24} =$ ..........................................................

### Remarque

Attention, de façon générale, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Par exemple, prenons $a = 9$ et $b = 16$.
$\sqrt{a+b} = \sqrt{25} = 5$, tandis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 3 + 4 = 7$.

**Propriété**
Pour tous nombres $a$ et $b$ strictement positifs, on a $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

**Démonstration**
Posons $C = \sqrt{a+b}$ et $D = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
$C^2 = \sqrt{a+b}^2 = a + b$.
Par ailleurs, $D^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$.
Or, $2\sqrt{ab} > 0$.
On a donc $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > \sqrt{a+b}^2$, soit $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - \sqrt{a+b}^2 > 0$.
$D^2 - C^2 > 0$, soit $(D - C)(D + C) > 0$.
Or, il est clair que $C > 0$ et $D > 0$, donc $D + C > 0$.
D'après la règles des signes, $D - C > 0$, soit $D > C$.
Ainsi, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$. □

**Propriété**
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$ (valeur absolue de $a$).

Rappel : $|a| = a$ si $a \geqslant 0$, et $|a| = -a$ si $a < 0$.

**Démonstration**
Si $a \geqslant 0$, $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$.
Si $a < 0$, alors $(-a) > 0$, et $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a) \times (-a)} = \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$ (qui est un nombre positif).
On retrouve bien la valeur absolue de $a$ dans tous les cas. □

### Exercice 3 (la quantité conjuguée)

1. Vérifier que $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$ est un nombre entier.
2. On dit que $\sqrt{5} - 2$ est la quantité conjuguée de $\sqrt{5} + 2$. Déduire de la question précédente l'écriture sans radical au dénominateur de
$A = \dfrac{1}{\sqrt{5} + 2}$.
3. En utilisant la quantité conjuguée, écrire sans radical au dénominateur les nombres suivants :
$B = \dfrac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$ $\qquad C = \dfrac{5}{2 - \sqrt{3}}$ $\qquad D = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.