PS. Correction du dm6

Exercice 1
Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{7n-1}{n+2}$ est croissante et majorée par 7.
En déduire que (u_n) est bornée et donner un encadrement de u_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Sens de variation
Pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{7(n+1)-1}{n+1+2} - \dfrac{7n-1}{n+2} = \dfrac{7n+6}{n+3} - \dfrac{7n-1}{n+2}$.
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{(7n+6)(n+2)-(7n-1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{15}{(n+2)(n+3)} > 0$.
En effet, n est en entier naturel, donc $n+2 > 0$, et $n+3 > 0$. Donc pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} > u_n$.
(u_n) est strictement croissante.
Majoration par 7
Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n - 7 = \dfrac{7n-1}{n+2} - \dfrac{7(n+2)}{n+2} = \dfrac{-15}{n+2} < 0$ De même, n est un entier naturel, donc $n+2 > 0$.
Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 7$.
Encadrement de (u_n)
Toute suite croissante est minorée par son 1er terme.
Ici, $u_0 = -0,5$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-0,5 \leqslant u_n < 7$. La suite (u_n) est bornée.

Exercice 2
Partie 1
On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \text{ et} \\ \text{pour tout } n \geqslant 0, u_{n+1} = \dfrac{1}{8}(u_n)^2 + u_n - 2 \end{cases}$.
En posant $f(x) = \dfrac{1}{8}x^2 + x - 2$, on a donc $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geqslant 0$.
On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.

1. Placer u_0 sur l'axe des abscisses et, en s'aidant du graphique, construire les termes u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
2. Vérifier par le calcul u_1 et u_2.
   $u_1 = \dfrac{1}{8} \times 5^2 + 5 - 2 = \dfrac{25}{8} + \dfrac{24}{8} = \dfrac{49}{8} = 6,125$.
   $u_2 = \dfrac{1}{8}{u_1}^2 + u_1 - 2 = \dfrac{4531}{512} \approx 8,8145$.
3. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (u_n) ? sur sa convergence ?
   Il semble que la suite (u_n) soit croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.

Partie 2
On considère maintenant la suite (V_n) définie par $\begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = f(V_n), \quad n \geqslant 0 \end{cases}$, toujours avec la fonction $f(x) = \dfrac{1}{8}x^2 + x - 2$.

1. Construire de même les premiers termes de la suite (V_n) sur l'axe des abscisses (au moins jusqu'à V_4).
2. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de (V_n) ?
   (V_n) semble décroissante.
3. Que peut-on conjecturer sur sa convergence ?
   Il semble que (V_n) converge vers -4.

4. On admet que (V_n) converge vers l'unique solution négative de l'équation $f(x) = x$. Déterminer la limite de la suite (V_n) par le calcul.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x \\ \frac{1}{8}x^2 + x - 2 & = & x \\ \frac{1}{8}x^2 & = & 2 \\ x^2 & = & 16 \\ x = 4 & \text{ou} & x = -4 \end{array}$$

(V_n) converge vers la solution négative de l'équation $f(x) = x$, donc la limite de (V_n) est -4.

5. Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que $|V_{n_0} + 4| < 10^{-4}$.
DEBUT
$3 \rightarrow V$
$0 \rightarrow N$
`Tant que` $|V + 4| \geqslant 10^{-4}$
    $N + 1 \rightarrow N$
    $\frac{1}{8}V^2 + V - 2 \rightarrow V$
`Fin Tant que`
`Afficher` N
`Afficher` V (facultatif, pour vérifier $|V_{n_0} + 4|$)
FIN

6. Programmer l'algorithme à la calculatrice et donner la valeur de n_0.
$n_0 = 7$, et $V_7 \approx -3,999\,999\,698$.
$|V_7 + 4| \approx 3,02 \times 10^{-7} < 10^{-4}$.