Contrôle de mathématiques n° 1
Correction du sujet 1

Exercice 2

1. $\Delta = b^2 - 4ac = 42^2 - 4 \times 1 \times 80 = 1444 = 38^2 > 0$.
   Le trinôme a donc deux racines :
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{42-38}{2} = 2$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{42+38}{2} = 40$

2. (a) La partie restante du terrain est un rectangle de dimensions $(30-x)$ et $(12-x)$.
   Son aire a pour expression :
   $(30-x)(12-x) = x^2 - 30x - 12x + 30 \times 12 = x^2 - 42x + 360$.
   On souhaite que cette aire soit supérieure à 280.
   D'où l'inéquation :

$$\begin{aligned} x^2 - 42x + 360 &\geqslant 280 \\ x^2 - 42x + 80 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

   (b) On étudie le signe du trinôme $x^2 - 42x + 80$.
   Le trinôme est positif (signe de a, ici $a = 1$) à l'extérieur des racines, et du signe de $-a$ entre les racines.

x	$-\infty$		2		40		$+\infty$
$x^2-42x+80$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc $x^2 - 42x + 80 \geqslant 0$ sur $]-\infty; 2] \cup [40; +\infty[$.
   D'après le contexte, la largeur x du chemin est comprise en 0,8 m et 12 m.
   $\boxed{\text{Donc la largeur du chemin doit être entre 0,8 m et 2 m.}}$

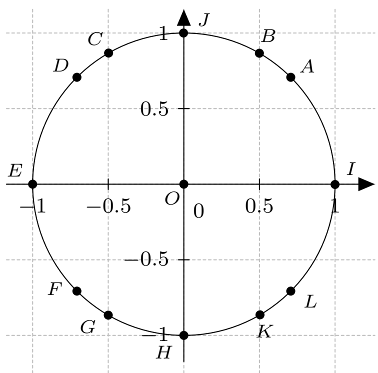
Exercice 3 (1,5 point)

On répondra sans justification.

1. Donner l'image des réels suivants sur le cercle :
   $-\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{4}$; 11π ; $-\dfrac{5\pi}{4}$.

Nombre	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{4}$	11π	$-\dfrac{5\pi}{4}$
Image	H	A	E	D

2. Donner trois nombres réels dont l'image est le point L.
   L est l'image de $-\dfrac{\pi}{4}$, et $\dfrac{7\pi}{4}$, et de $\dfrac{15\pi}{4}$.



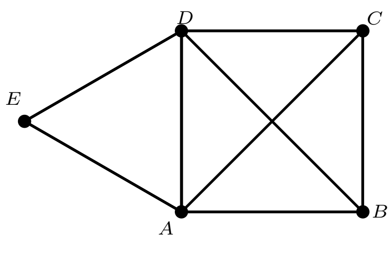
Exercice 4 (1,5 point)

Donner la mesure principale des angles orientés suivants. On justifiera les résultats par un calcul.

1. $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \dfrac{19\pi}{7} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La mesure principale est $\dfrac{5\pi}{7}$.
2. $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = -\dfrac{3\pi}{5} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La mesure principale est $-\dfrac{3\pi}{5}$.
3. $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = -\dfrac{13\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La mesure principale est $\dfrac{3\pi}{4}$.

Exercice 5 (2 points)

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré et ADE est un triangle équilatéral.



Donner sans justification la mesure principale des angles suivants :

1. $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
2. $(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DA}) = -\dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.
3. $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
4. $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE}) = \dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$.

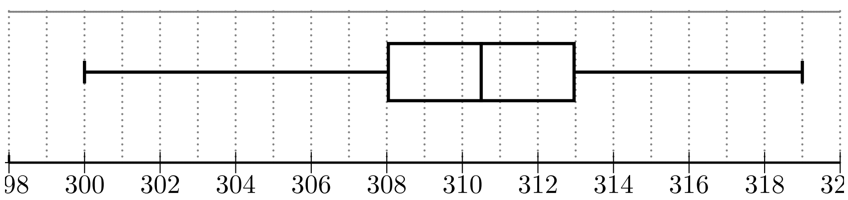
Exercice 6 (7 points)
La pesée automatique d'un lot de 20 barquettes d'un produit alimentaire a donné les résultats suivants (arrondis au gramme) :

$$300\,;311\,;315\,;308\,;311\,;317\,;308\,;309\,;311\,;312\,;$$
$$309\,;318\,;307\,;308\,;303\,;310\,;314\,;\ 313\,;310\,;319.$$

1. Recopier et compléter le tableau d'effectifs de la série :

Poids x_i	300	303	307	308	309	310	311	312	313	314	315	317	318	319
Effectifs n_i	1	1	1	3	2	2	3	1	1	1	1	1	1	1
ECC	1	2	3	6	8	10	13	14	15	16	17	18	19	20

2. Déterminer la médiane et les quartiles de la série. Justifier.
   L'effectif total est $N = 20$ (pair).
   Donc la médiane est la demi-somme des deux valeurs centrales, la 10e et la 11e.
   $\boxed{Me = \dfrac{310+311}{2} = 310,5.}$
   $\dfrac{N}{4} = \dfrac{20}{4} = 5$. Donc Q_1 est la 5e valeur : $\boxed{Q_1 = 308.}$
   $\dfrac{3N}{4} = \dfrac{60}{20} = 15$. Donc Q_3 est la 15e valeur : $\boxed{Q_3 = 313.}$
3. Construire le diagramme en boîte de la série.



4. Rappeler les formules permettant de calculer la moyenne et l'écart-type d'une série statistique, puis, en utilisant la calculatrice, donner la moyenne et l'écart-type de la série (aucun détail de calcul n'est demandé).

$$\begin{aligned} m &= \frac{x_1n_1 + \cdots + x_pn_p}{N} \\ &= \frac{1}{20}(300 \times 1 + 303 \times 1 + \cdots + 319 \times 1) \\ &= 310,65 \\ \sigma &\approx 4,55 \end{aligned}$$

5. Un lot est accepté si les trois conditions suivantes sont remplies :
   — Le poids moyen m d'une barquette est de 310 g à 1 g près ;
   — l'écart-type s des poids est inférieur à 5 g ;
   — au moins 80 % des poids sont dans l'intervalle $[m-s; m+s]$
   Qu'en est-il pour ce lot ?
   Il est clair que les deux premières contraintes sont respectées.
   Il reste à déterminer le pourcentage de valeurs dans l'intervalle $[m-s; m+s]$.
   $m - s \approx 310,65 - 4,55 \approx 306,1$.
   $m + s \approx 310,65 + 4,55 \approx 315,2$.
   Il y a 5 valeurs en dehors de l'intervalle $[m-s; m+s]$, ce qui revient à dire qu'il y a 15 valeurs dans cet intervalle.
   $\dfrac{15}{20} \times 100 = 75$.
   Il y a 75 % des poids dans l'intervalle $[m-s; m+s]$.
   $\boxed{\text{On ne peut pas accepter ce lot à cause de la 3e contrainte.}}$

Exercice 7 (bonus - 1,5 points)
On considère la série statistique formée des valeurs entières suivantes :

$$6, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 17$$

En remplaçant une valeur par une autre valeur entière, on souhaite rendre l'écart-type le plus petit possible. Quelle modification faut-il faire ?
La moyenne de la série de départ est de 11,11.
L'écart-type décrit de la dispersion par rapport à la moyenne.
Pour réduire au maximum l'écart-type, on remplace la valeur de la série la plus éloignée de la moyenne : le 17.
On le remplace par l'entier le plus proche de la moyenne de la série constituée des nombres une fois qu'on a enlevé le 17. La moyenne devient alors 10,375.
$\boxed{\text{On remplace le 17 par un 10.}}$

Réponses su sujet 2

Exercice 9
voir sujet 1

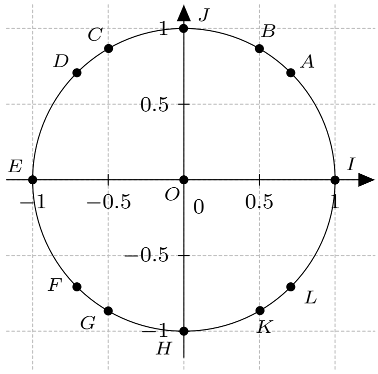
Exercice 10 (1,5 point)

On répondra sans justification.

1. Donner l'image des réels suivants sur le cercle : $\dfrac{\pi}{2}$; $-\dfrac{\pi}{4}$; 6π ; $-\dfrac{3\pi}{4}$.

Nombre	$\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	6π	$-\dfrac{3\pi}{4}$
Image	J	L	I	F

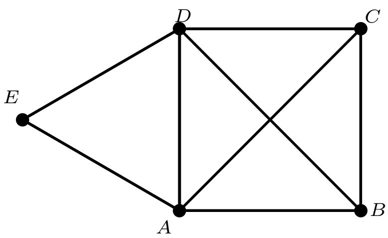
2. Donner trois nombres réels dont l'image est le point D.
D est l'image de $\dfrac{3\pi}{4}$, de $\dfrac{11\pi}{4}$, et de $\dfrac{19\pi}{4}$.



Exercice 11 (1,5 point)
Donner la mesure principale des angles orientés suivants. On justifiera les résultats par un calcul.

1. $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \dfrac{11\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La mesure principale est $-\dfrac{\pi}{3}$.
2. $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \dfrac{9\pi}{10} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La mesure principale est $\dfrac{9\pi}{10}$.
3. $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = -\dfrac{23\pi}{5} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La mesure principale est $-\dfrac{3\pi}{5}$.

Exercice 12 (2 points)
Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré et ADE est un triangle équilatéral.



Donner sans justification la mesure principale des angles suivants :

1. $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
2. $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.
3. $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}) = -\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
4. $(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DC}) = \dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$.

Exercice 13 (8 points)
La pesée automatique d'un lot de 20 barquettes d'un produit alimentaire a donné les résultats suivants (arrondis au gramme) :

300 ;310 ;307 ;311 ;309 ;307 ;311 ;314 ;309 ;314
310 ;312 ;311 ;318 ;301 ;315 ;308 ;315 ;313 ;319

1. Recopier et compléter le tableau d'effectifs de la série :

Poids x_i	300	301	307	308	309	310	311	312	313	314	315	318	319
Effectifs n_i	1	1	2	1	2	2	3	1	1	2	2	1	1
ECC	1	2	4	5	7	9	12	13	14	16	18	19	20

2. Déterminer la médiane. Justifier. $Me = 311$
3. Déterminer les quartiles Q_1 et Q_3 de la série. Justifier. $Q_1 = 308$, et $Q_3 = 314$.
4. Construire le diagramme en boîte de la série.
5. Rappeler une formule permettant de calculer la moyenne d'une série statistique, puis, en utilisant le menu statistique de la calculatrice, donner la moyenne et l'écart type de la série (aucun détail de calcul n'est demandé).
$\overline{x} = 310,7$, et $\sigma \approx 4,68$.
6. Un lot est accepté si les trois conditions suivantes sont remplies :
— Le poids moyen m d'une barquette est de 310 g à 1 g près ;
— l'écart-type s des poids est inférieur à 5 g ;
— au moins 80 % des poids sont dans l'intervalle $[m - s; m + s]$
Qu'en est-il pour ce lot ? Le lot est accepté.