Correction du contrôle de mathématiques n° 4

Exercice 1 (8 points)

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0; 10]$ par

$$f(x) = -0,65x^2 + 8,65x + 14.$$

1. Calculer $f'(x)$.
   $\boxed{f'(x) = -0,65 \times 2x + 8,65 = -1,3x + 8,65.}$
2. Déterminer le tableau de variation de f sur $[0; 10]$.
   $f'(x) = 0$ ssi $-1,3x + 8,65 = 0$, soit $x = \dfrac{8,65}{1,3} \approx 6,7$.

x	0		$8,65/1,3$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	14	$\nearrow$	$\approx 42,8$	$\searrow$	$35,5$

Avec la calculatrice, $f(0) = 14$, $f(10) = 35,5$, et $f\left(\dfrac{8,65}{1,3}\right) \approx 42,8$.

Partie B. Utilisation d'un tableur

Les ventes, en milliers d'exemplaires, d'un matériel médical, entre 2007 (année 0), et 2012, sont données dans le tableau ci-dessous. Pour faire une prévision, on utilise comme modèle mathématique la fonction f sur$[0; 10]$ définie $f(x) = -0,65x^2 + 8,65x + 14$, qui peut être représentée par un arc de parabole P.

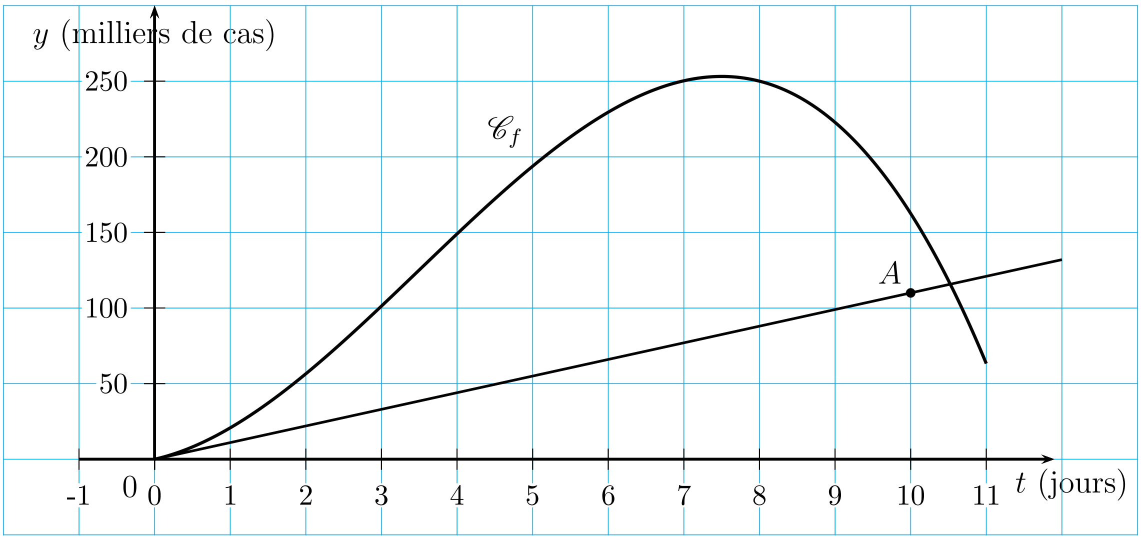
	A	B	C
1	Rang de l'année	Vente en milliers	Modèle mathématique
2	0	14	14
3	1	22	22
4	2	28	28,7
5	3	33,5	34,1
6	4	38,5	38,2
7	5	41	41
8	6	x	42,5
9	7	x	42,7
10	8	x	41,6
11	9	x	39,2
12	10	x	35,5

$f(x)$ donne donc l'estimation des ventes de l'année $(2007 + x)$.

1. Quelle formule a-t-on pu entrer dans la cellule C2, et recopier vers le bas pour tabuler la fonction f ?
   On entre : $\boxed{= -0,65 * (A2)^2 + 8,65 * A2 + 14}$.

2. Peut-on dire que le point $B(1;22)$ est situé sur la parabole P ? Justifier.
   $f(1) = -0,65 + 8,65 + 14 = 8 + 14 = 22$.
   $\boxed{\text{Donc le point } B(1;22) \text{ appartient à la courbe de } f.}$
3. Suivant ce modèle, combien d'exemplaires du matériel médical seront vendus en 2014 ?
   2014 correspond à $n = 7$.
   $f(7) = 42,7$, donc, d'après ce modèle, on peut estimer les ventes en 2014 à 42,7 milliers.
4. Si ce modèle est pertinent, quand atteindra-t-on le maximum des ventes ?
   D'apr'es l'étude de la fonction f, le maximum est obtenu pour $x \approx 6,7$.
   $f(6) \approx 42,5$, et $f(7) \approx 42,7$.
   Donc selon ce modèle, le maximum des ventes sera obtenu en 2014 (car c'est l'année de rang 7).

Exercice 2 (12 points)
Lors d'une épidémie observée sur une période de 11 jours, un institut de veille sanitaire a modélisé le nombre de malades. La durée écoulée à partir du début de la période et exprimée en jours, est notée t. Le nombre de cas exprimé en milliers est modélisé par la fonction f définie et dérivable sur $[0; 11]$. On donne ci-dessous la courbe de la fonction f.



Partie A

1. On considère que la situation est "grave" lorsque le nombre de cas est d'au moins 150 000 malades.
   (a) Au bout de combien de jours la situation devient-elle "grave" ?
   $\boxed{\text{La situation devient grave au bout de 4 jours.}}$
   (b) Pendant combien de jours cette situation perdure-t-elle ?
   $\boxed{\text{Cela dure un peu plus de 6 jours.}}$
2. Soit $A(10; 112,5)$. La droite (OA) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point O.
   Déterminer $f'(0)$ où désigne la dérivée de f. Justifier.
   $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0.
   Cette tangente est la droite (OA).
   $$\boxed{\text{Donc } f'(0) = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_0} = \frac{112,5}{10} = 11,25.}$$

3. Le nombre $f'(t)$ représente la vitesse d'évolution de la maladie, t jours après l'apparition des premiers cas.
   (a) Déterminer graphiquement le nombre maximal de malades sur la période des 11 jours et le moment où il est atteint.
   Que peut-on dire alors de la vitesse d'évolution de la maladie ?

Le nombre maximal de malades est obtenu au bout de 7 jours et demi, il est d'environ 255 milliers de malades. La vitesse d'évolution est alors nulle (la maladie arrête de progresser).

   (b) Déterminer graphiquement à quel moment de l'épidémie la maladie progresse le plus vite. Expliquer.

On cherche en quel point la tangente a le plus grand coefficient directeur. Il semble que la vitesse d'évolution soit la plus grande lorsque $t = 3$, soit au bout de 3 jours.

Partie B

La fonction f évoquée dans la partie A est définie sur $[0; 11]$ par

$$f(t) = -t^3 + 10,5t^2 + 11,25t.$$

1. Compléter le tableau de valeurs de f (aucune justification n'est demandée).
   En arrondissant au dixième,

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(t)$	0	20,8	56,5	101,3	149	193,8	229,5	250,3	205	222,8	162,5	63,3

2. Calculer $f'(t)$ et vérifier que $f'(t) = (-3t - 1,5)(t - 7,5)$.
   $f'(t) = -3t^2 + 10,5 \times 2t + 11,25 = -3t^2 + 21t + 11,25$.
   En développant,
   $(-3t - 1,5)(t - 7,5) = -3t^2 + 22,5t - 1,5t + 11,25 = -3t^2 + 21t + 11,25$.
   $\boxed{\text{Donc } f'(t) = (-3t - 1,5)(t - 7,5).}$
3. Étudier le signe de $f'(t)$ et dresser le tableau de variation de f sur $[0; 11]$.
   On étudie le signe de $f'(t)$.
   $-3t - 1,5 = 0$ ssi $t = -0,5$.
   $t - 7,5 = 0$ ssi $t = 7,5$.

t	0		7,5		11
$-3t - 1,5$		$-$		$-$	
$t - 7,5$		$-$	0	$+$	
$f'(t) = (-3t - 1,5)(t - 1,5)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\approx 253,1$	$\searrow$	$\approx 63,3$

4. Retrouver par le calcul le résultat de la question 2 de la partie A.
   $f'(t) = -3t^2 + 21t + 11,25$.
   $\boxed{\text{Par le calcul, } f'(0) = 0 + 0,11,25 = 11,25.}$
5. Question bonus.
   En étudiant les variations de la fonction f', retrouver par le calcul le moment où

l'épidémie progresse le plus vite.
$f''(t) = -6t + 21,\ f'(t) = 0$ ssi $t = \dfrac{21}{6} = 3,5.$

t	0		$3,5$		11
$f''(t)$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\boxed{\text{Donc la vitesse dévolution de la maladie est maximale pour } t = 3,5\text{, soit au bout de 3 jours et demi.}}$