1re G. Interrogation de mathématiques n° 3

Correction du Sujet 2

Exercice 1 (cours, 7 points)

Compléter sur l'énoncé.

1. Soit f une fonction dérivable en un réel a.
   Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
2. Donner l'expression de la dérivée des fonctions suivantes
   (a) Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -11x + 9$, alors $f'(x) = -11$
   (b) Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^6$, alors $f'(x) = 6x^5$
   (c) Si pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
   (d) Si pour tout $x > 0$, $f(x) = \sqrt{x}$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
3. Opérations sur les dérivées.
   Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, soit $k \in \mathbb{R}$. Alors :
   (a) $(u+v)$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$
   (b) $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$
   (c) $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$
   (d) Si v ne s'annule pas sur I, alors
   $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
   et $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice 2 (3 points)

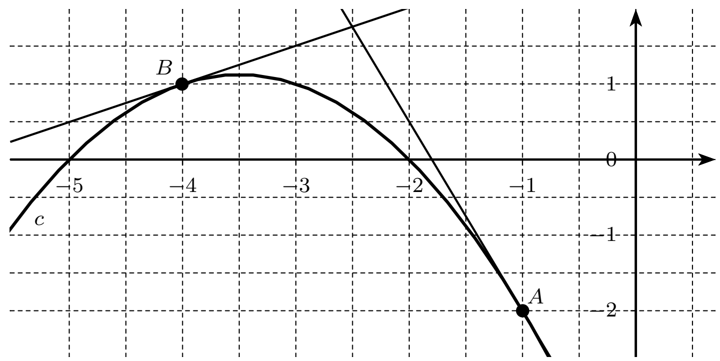
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + x$

1. En revenant à la définition, étudier la dérivabilité de f en -1, et montrer que $f'(-1) = -5$.
   Soit $h \neq 0$.
   $$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{3(-1+h)^2 + (-1+h) - (3 \times (-1)^2 - 1)}{h}$$
   $$= \frac{3(h^2 - 2h + 1) + h - 1 - 2}{h} = \frac{3h^2 - 5h}{h} = 3h - 5.$$
   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = -5.$$
   $\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en } -1 \text{ et } f'(-1) = -5.}$
2. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.
   On a $f'(-1) = -5$.
   $f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 1 = 2$.
   $y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) = -5(x+1) + 2 = -5x - 3$.
   $\boxed{\text{La tangente à la courbe de } f \text{ au point d'abcisse } -1 \text{ a pour équation } y = -5x - 3.}$

Exercice 3 (3 points)

On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et les tangentes à cette courbe aux points A et B.

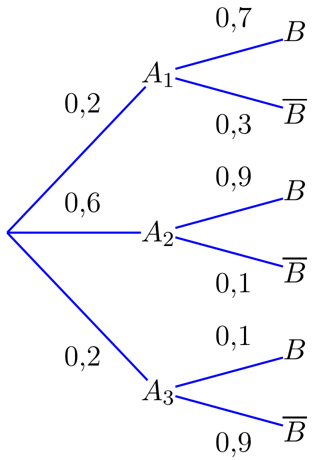
1. Déterminer $f'(-4)$. Justifier.
   $f'(-4)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point B d'abscisse -4.
   $\boxed{f'(-4) = 0,5.}$
2. Déterminer $f'(-1)$. Justifier.
   $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A d'abscisse -1.
   $\boxed{f'(-1) = -2,5.}$
3. On admet désormais que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x^2 + 7x + 10)$.
   (a) Calculer $f'(x)$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\dfrac{1}{2}(2x+7) = -x - \dfrac{7}{2}.}$
   (b) Retrouver par le calcul $f'(-4)$ et $f'(-1)$.
   $\boxed{f'(-4) = -(-4) - \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2},\ \text{et } f'(-1) = -(-1) - \dfrac{7}{2} = -\dfrac{5}{2}.}$
   On retrouve les nombres dérivés lus graphiquement.



Exercice 4 (5 points)
Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^5 + 8x^3 + 2x - 4$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -5x^4 + 24x^2 + 2.}$
2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (3 - 2x)\sqrt{x}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ f'(x) = -2\sqrt{x} + (3 - 2x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.}$
3. f est définie sur $]3; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{11}{x^2 - 3x}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x > 3,\ f'(x) = 11 \times \dfrac{-(2x-3)}{(x^2-3x)^2} = \dfrac{-22x + 33}{(x^2-3x)^2}.}$
4. f est définie sur $]-9; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5-x}{x+9}$.
   $\boxed{\text{Pour } x > -9,\ f'(x) = \dfrac{-1(x+9) - (5-x) \times 1}{(x+9)^2} = -\dfrac{14}{(x+9)^2}.}$

Exercice 5 (2 points)
On donne l'arbre pondéré suivant.



Les événements A_3 et B sont-ils indépendants ? Justifier.
A_3 et B sont indépendants ssi $P(B) = P_{A_3}(B)$.
A_1, A_2, A_3 forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales,
$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$
$P(B) = 0,2 \times 0,7 + 0,6 \times 0,9 + 0,2 \times 0,1$
$P(B) = 0,14 + 0,64 + 0,02$
$P(B) = 0,7$.
Or, on lit directement sur l'arbre que $P_{A_3}(B) = 0,1$.

$\boxed{\text{Comme } P(B) \neq P_{A_3}(B) \text{, les événements } A_3 \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants.}}$