Chapitre 4 : Inégalités et inéquations

I Inégalités

Rappel :
L'inégalité (stricte) $a < b$ signifie que a est strictement plus petit que b.
L'inégalité (large) $a \leqslant b$ signifie que a est inférieur ou égal à b.

Propriété (inégalités et addition)
Pour tous nombres réels a, b, c et d

1. Si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$.
   Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve le sens de l'inégalité.
2. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$.
   On peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens.

Remarque
En particulier, $a > b$ équivaut à $a - b > 0$.

Propriété (inégalités et multiplication)
Soient a, b et c des nombres réels.

1. Si $a \leqslant b$ et $c > 0$, alors $a \times c \leqslant b \times c$.
   Multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement positif conserve le sens de l'inégalité.
2. Si $a \leqslant b$ et $c < 0$, alors $a \times c \geqslant b \times c$.
   Multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement négatif change le sens de l'inégalité.

Propriété (dite "règle des signes")
Soient a, et b deux nombres non nuls.

1. Si a et b sont de même signe alors $a \times b > 0$ et $\dfrac{a}{b} > 0$.
   Le produit (ou quotient) de deux nombres de même signe est positif.
2. Si a et b sont de signes contraires, alors $a \times b < 0$ et $\dfrac{a}{b} < 0$.
   Le produit (ou quotient) de deux nombres de signes contraires est négatif.

Exercice 1
Isoler x à l'aide d'inégalités équivalentes à celle donnée.

1. $x - 6 < 7$ ssi
2. $-2x > 8$ ssi
3. $\dfrac{3}{4}x \geqslant 3$ ssi

II Application à la résolution d'inéquations du premier degré.

Méthode : on isole l'inconnue x en utilisant les propriétés sur les inégalités.

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble solution sous forme d'un intervalle.

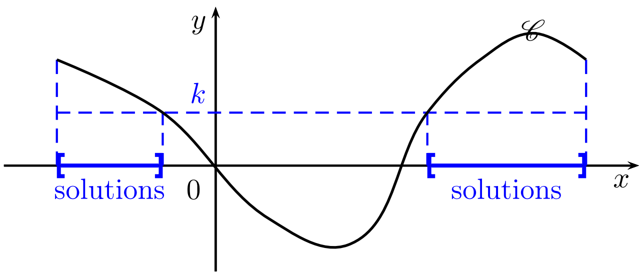
1. $9x + 4 \leqslant 3x + 1$
2. $-6x + 4 > 4x - 1$
3. $2 - x < 7x + 9$
4. $\dfrac{2}{7}x - 1 > x + \dfrac{5}{3}$

III Résolution graphique d'inéquations

III.1 Inéquation $f(x) \geqslant k$

Propriété
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Notons $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Soit k un nombre réel.
Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant k$ (resp. $f(x) > k$) sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ qui ont une ordonnée supérieure ou égale à k (resp. strictement supérieure à k).

Illustration pour $f(x) \geqslant k$

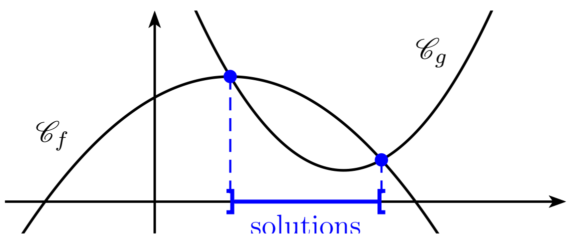


Remarque
On a des énoncés analogues pour les inéquations $f(x) \leqslant k$ et $f(x) < k$.
L'ensemble solution peut être une réunion d'intervalles.

III.2 Inéquation $f(x) > g(x)$

Propriété
Soient f et g deux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Notons respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leur courbe représentative dans un repère du plan.
Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points où $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

Illustration pour l'inéquation $f(x) > g(x)$.



Remarque
Pour l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$, on inclut les abscisses des points d'intersection dans les solutions.

IV Signe de $ax + b$

Théorème
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, avec $a \neq 0$.
Alors $f(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{b}{a}$.

— Si $a > 0$, alors le signe de $f(x)$ est donné par :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		$-$	0	$+$	

— Si $a < 0$, alors le signe de $f(x)$ est donné par :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		$+$	0	$-$	

Remarque
Ces tableaux résument de signe de la fonction.
Le $+$ signifie strictement positif, et le $-$ signifie strictement négatif.

Démonstration
On se limite au cas où $a < 0$ (le cas $a > 0$ se montre de façon analogue).
On suppose donc que $a < 0$.
On a déjà vu $ax + b = 0$ ssi $ax = -$ ssi $a = -\dfrac{b}{a}$.
$ax + b > 0$ ssi $ax > -b$ ssi $x < -\dfrac{b}{a}$ car en divisant membre à membre par $a < 0$, le sens de l'inégalité change.
$ax + b < 0$ ssi $ax < -b$ ssi $x > -\dfrac{b}{a}$ (de même). □

Exemple :

1. $f(x) = 2x - 6$.
   $a = 2$, et $b = -6$.
   $2x - 6 = 0$ lorsque $x = 3$.
   Comme $a = 2 > 0$, on a :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x - 6$		$-$	0	$+$	

   Cela signifie que $f(x) < 0$ lorsque $x \in]-\infty; 3[$, $f(x) = 0$ ssi $x = 3$, et $f(x) > 0$ lorsque $x \in]3; +\infty[$.
2. $g(x) = 2 - 7x$.
   $a = -7$, $b = 2$.
   $2 - 7x = 0$ ssi $x = \dfrac{2}{7}$.
   Comme $a = -7 < 0$, on a :

x	$-\infty$		$2/7$		$+\infty$
$2 - 7x$		$+$	0	$-$	

Exercice 3
Dresser le tableau de signe des fonctions affines suivantes.

1. $f(x) = 4x - 3$
2. $g(x) = -7x + 21$
3. $h(x) = x + 4$
4. $i(x) = 5 - x$.

V Inéquation produit, inéquation quotient

On résout ces inéquations en dressant un tableau de signes.
La méthode repose sur la "règle des signes", il faut donc toujours se ramener à l'étude du signe d'une expression factorisée.

Propriété (dite "règle des signes")
Soient a, et b deux nombres non nuls.

1. Si a et b sont de même signe alors $a \times b > 0$ et $\dfrac{a}{b} > 0$.
   Le produit (ou quotient) de deux nombres de même signe est positif.
2. Si a et b sont de signes contraires, alors $a \times b < 0$ et $\dfrac{a}{b} < 0$.
   Le produit (ou quotient) de deux nombres de signes contraires est négatif.

Méthode pour les inéquations produit et inéquations quotient

1. Faire apparaître 0,
2. Factoriser (mettre au même dénominateur s'il y a des divisions),
3. Faire un tableau de signe (une ligne pour chaque facteur),
4. Conclure (donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles).

Exercice 4
Résoudre l'inéquation $6x < 2x^2$.

$$\begin{aligned} 6x &< 2x^2 \\ 6x - 2x^2 &< 0 \\ x(6-2x) &< 0 \end{aligned}$$

Valeurs clés :
$x = 0$
$6 - 2x = 0$ lorsque $x = 3$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$6-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(6-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble solution est $S =]-\infty; 0[\cup]3; +\infty[$.

Exercice 5
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x+5}{x} \leqslant 4$.

$$\begin{aligned}
\frac{x+5}{x} &\leqslant 4 \\
\frac{x+5}{x} - 4 &\leqslant 0 \\
\frac{x+5}{x} - \frac{4x}{x} &\leqslant 0 \\
\frac{x+5-4x}{x} &\leqslant 0 \\
\frac{5-3x}{x} &\leqslant 0
\end{aligned}$$

Valeurs clés :
$5-3x=0$ lorsque $x=\dfrac{5}{3}$.
$x=0$ (valeur interdite).

x	$-\infty$		0		$5/3$		$+\infty$
$5-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{5-3x}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left]-\infty; 0\right[\cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right[.}$$

Remarque (la double barre)
Lorsque $x=0$, l'inéquation précédente $\dfrac{5-3x}{x} \leqslant 0$ n'est pas définie. On dit que 0 est valeur interdite pour l'inéquation.
On l'indique par une double barre dans la dernière ligne du tableau de signe.
Les valeurs interdites sont toujours exclues de l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Exercice 6
Résoudre les inéquations suivantes. Donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalle.

1. $(x-5)(8x+1) > 0$.
2. $\dfrac{(x+5)(-3-x)}{(7x+1)} \geqslant 0$.
3. $(x+3)^2 < 25x^2$.
   Indication : montrer que cette équation équivaut à $(6x+3)(-4x+3) < 0$.
4. $\dfrac{x-1}{x+4} \geqslant -2$.
5. $\dfrac{-15x-7}{3x+1} < -5$.