Chapitre 6 : Application de la dérivation

I Dérivée et sens de variation

I.1 Théorème fondamental

Théorème
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si pour tout $x \in I$ $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
2. Si pour tout $x \in I$ $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
3. Si pour tout $x \in I$ $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Remarque
Avec une fonction dérivable, il suffit d'étudier le signe de la dérivée pour déterminer les variations de la fonction.
Dans le théorème précédent, les réciproques sont vraies :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si f est croissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
2. Si f est décroissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
3. Si f est constante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 1$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 6$.
$f'(x) = 0$ ssi $2x - 6 = 0$, ssi $x = 3$.
f' est une fonction affine de coefficient directeur $a = 2 > 0$, son signe est positif pour $x > 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variation de $f(x)$		$\searrow$	-8	$\nearrow$	

On calcule le minimum de la fonction en remplaçant x par 3 dans l'expression de $f(x)$.
On a $f(x) = x^2 - 6x + 1$, donc $f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 1 = -8$.

I.2 Rappels sur le signe des fonctions affines

Théorème
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, avec $a \neq 0$.
Alors $f(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{b}{a}$.

— Si $a > 0$, alors le signe de $f(x)$ est donné par :

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$-$	0	$+$

— Si $a < 0$, alors le signe de $f(x)$ est donné par :

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$+$	0	$-$

Exemple :

1. $f(x) = 2x - 14$.
   $a = 2$, et $b = -14$.
   $2x - 14 = 0$ lorsque $x = 7$.
   Comme $a = 2 > 0$, on a :

x	$-\infty$	7	$+\infty$
$2x - 6$	$-$	0	$+$

2. $g(x) = 2 - x$.
   $a = -1$, $b = 2$.
   $2 - x = 0$ ssi $x = 2$.
   Comme $a = -1 < 0$, on a :

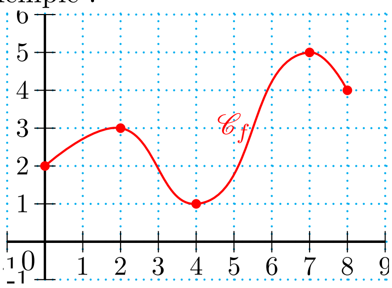
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2 - 7x$	$+$	0	$-$

I.3 Dérivée et extrema locaux

Propriété
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Soit a un réel appartenant à l'intervalle I, distinct des extrémités de I.

1. Si f admet un extremum local (maximum ou minimum) en a, alors $f'(a) = 0$.
2. Si $f'(a) = 0$ et si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f admet un extremum local en a.

Exemple :



f admet un maximum local en ______qui est ______

f admet un maximum local qui est aussi un maximum global en ______.
Ce maximum est ______.
f admet un minimum local (et global) en ______.
Ce minimum est ______.

Remarque
$f'(a) = 0$ signifie que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses.