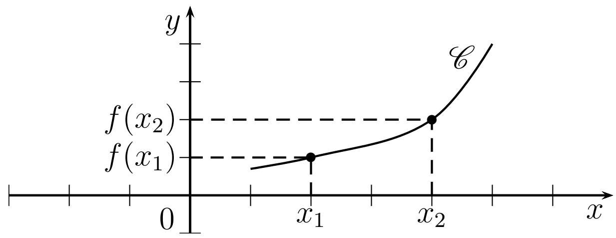
Chapitre 8 : Variations des fonctions et extrema

I Fonction croissante, décroissante sur un intervalle

I.1 Fonction croissante sur un intervalle

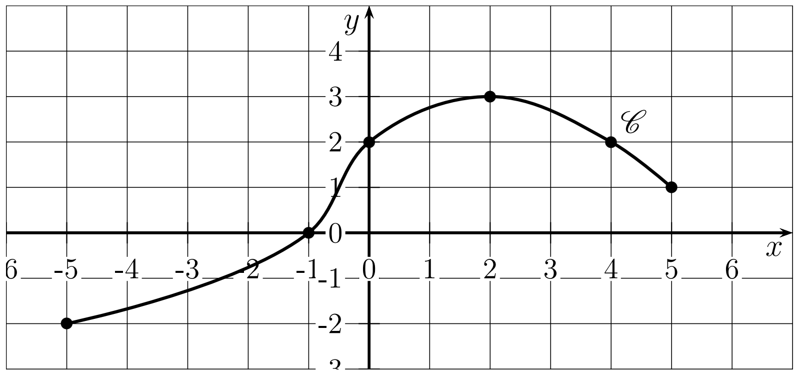
Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est croissante sur I lorsque pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I :

$$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \leqslant f(x_2).$$



Remarque
On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
En effet, $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans le même ordre que x_1 et x_2 (l'inégalité est dans le même sens entre deux réels et leurs images respectives).
La courbe représentative d'une fonction croissante sur un intervalle I a une allure « montante » sur I.
Pour une foncton croissante sur I, lorsque la variable x augmente, les valeurs $f(x)$ de la fonction augmentent.

Exercice 1
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 5]$.

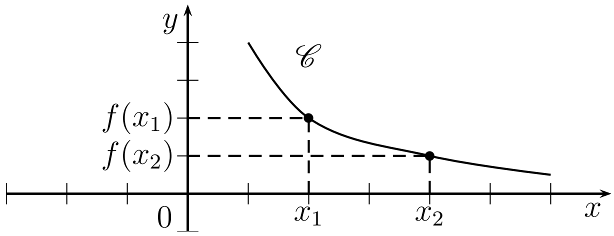


1. À l'aide du graphique, donner l'image par f des réels -5, -1, 0, 2, 4, et 5.
2. Justifier que f n'est pas croissante sur l'intervalle $[-5; 5]$.
3. Donner sans justifier le plus grand intervalle sur lequel f est croissante.

I.2 Fonction décroissante sur un intervalle

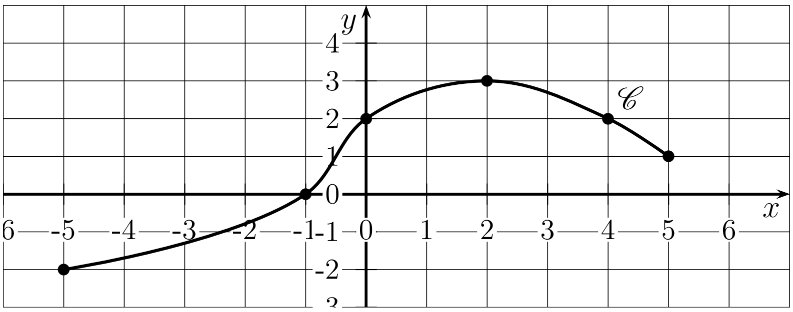
Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est décroissante sur I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenant à I :

$$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } \ldots$$



Remarque
Une fonction décroissante change l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Donc $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans l'ordre inverse de x_1 et x_2.
La courbe représentative d'une fonction croissante sur un intervalle I a une allure « descendante » sur I.
Pour une foncton décroissante sur I, lorsque la variable x augmente, les valeurs $f(x)$ de la fonction diminuent.

Exercice 2
On reprend les données de l'exercice 1.



1. Montrer que f n'est pas décroissante sur $[-5;5]$.
2. Donner sans justifier le plus grand intervalle où f est décroissante.

Remarque
En remplaçant avec des inégalités strictes dans les définitions précédentes, on définit une fonction strictement croissante (resp strictement décroissante) :
La fonction f est strictement croissante sur I lorsque :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I, \text{ si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) < f(x_2).$$

La fonction f est strictement décroissante sur I lorsque :

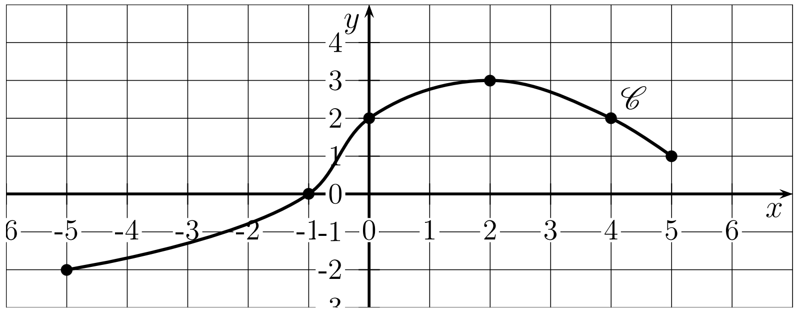
$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I, \text{ si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) > f(x_2).$$

Définition (fonction monotone)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est monotone sur I si elle est croissante sur I, ou décroissante sur I (un seul sens de variation sur tout l'intervalle).

II Tableau de variation d'une fonction

On résume les variations d'une fonction dans un tableau de variation.
Il précise les plus grands intervalles où la fonction est croissante ou décroissante.

Exemple :
On reprend la fonction de l'exercice 1.

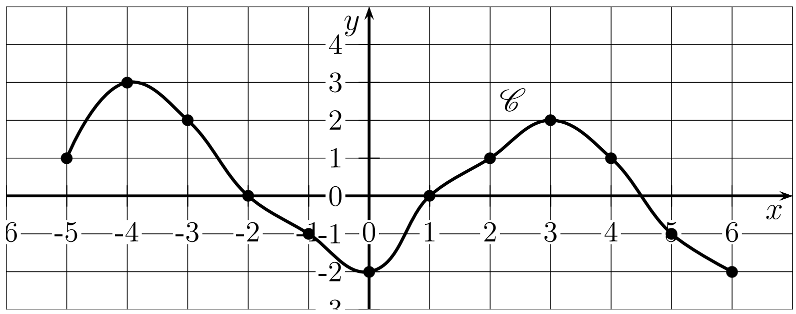


La fonction f est définie sur l'intervalle $[-5; 5]$.
Elle est croissante sur $[-5; 2]$, et décroissante sur $[2; 5]$.

x	-5		2		5
$f(x)$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Remarque
Dans la ligne de $f(x)$ on indique les images correspondantes par f.

Exercice 3
Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 6]$.



Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 4
On donne le tableau de variation d'une fonction f.

x	-10		-3		1		8
$f(x)$	67	$\searrow$	41	$\nearrow$	103	$\searrow$	89

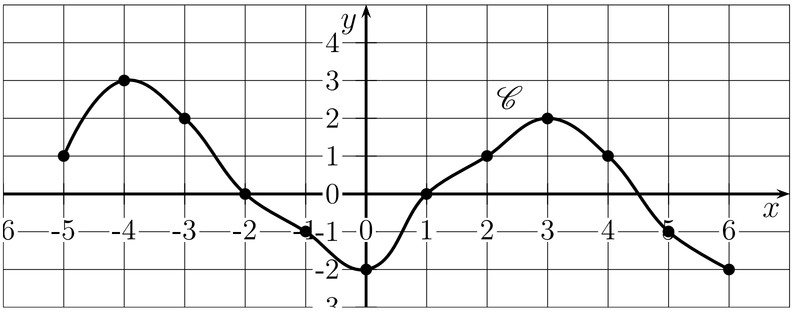
1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Donner les images par f indiquées dans le tableau.
3. Indiquer les intervalles :
   (a) où f est croissante.
   (b) où f est décroissante.
4. Comparer $f(-7)$ et $f(-6)$. Justifier
5. Comparer $f(0)$ et $f(0,5)$. Justifier.
6. Donner un encadrement de $f(5)$.
7. Peut-on comparer $f(-1)$ et $f(5)$?
8. Peut-on comparer $f(-7)$ et $f(5)$?

III Extrema d'une fonction

Définition
Soit f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$.

1. On dit que f admet un maximum en a lorsque
$$\text{pour tout } x \in I, \ldots$$
Le maximum de f sur I est $f(a)$.
2. On dit que f admet un minimum en a lorsque
$$\text{pour tout } x \in I, \ldots$$
Le minimum de f sur I est $f(a)$.
3. Un extremum est un maximum ou un minimum.

Exercice 5
On reprend les données de l'exercice 3. Compléter.

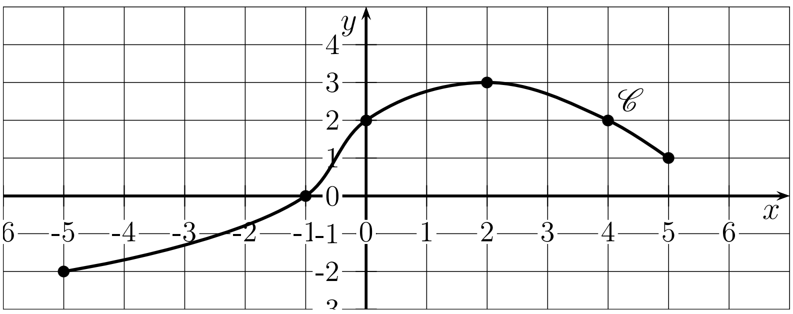


1. Le maximum de f sur $[-5; 6]$ est …. Il est atteint en ….
2. Le minimum de f $[-5; 6]$ est …. Il est atteint en … et ….

IV Tableau de signe d'une fonction

On peut résumer le signe d'une fonction dans un tableau de signe. Il précise les intervalles où la fonction est strictement positive, ceux où elle est strictement négative, et les valeurs en lesquelles la fonction s'annule.

Exercice 6
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 5]$.



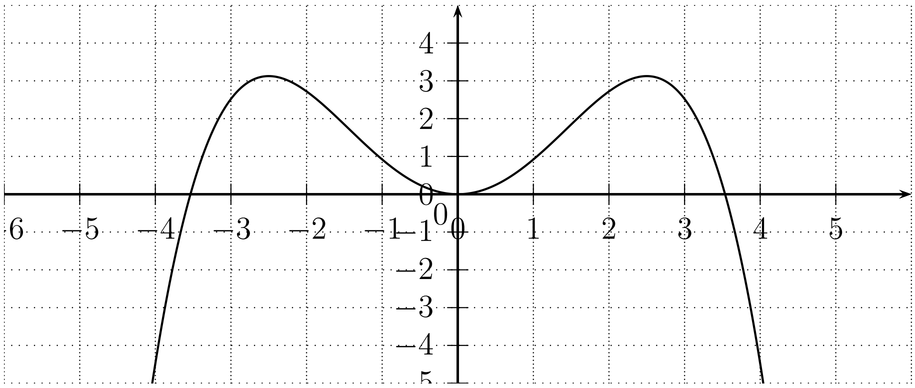
1. Compléter.
   (a) $f(x) = 0$ ssi …
   (b) $f(x) > 0$ ssi …
   (c) $f(x) < 0$ ssi …
2. En déduire le tableau de signe de f.

V Fonctions paires et fonctions impaires

V.1 Fonctions paires

Définition
Soit f une fonction définie sur un domaine D symétrique par rapport 0 (si $x \in D$, alors $-x \in D$).
On dit que f est paire lorsque pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.

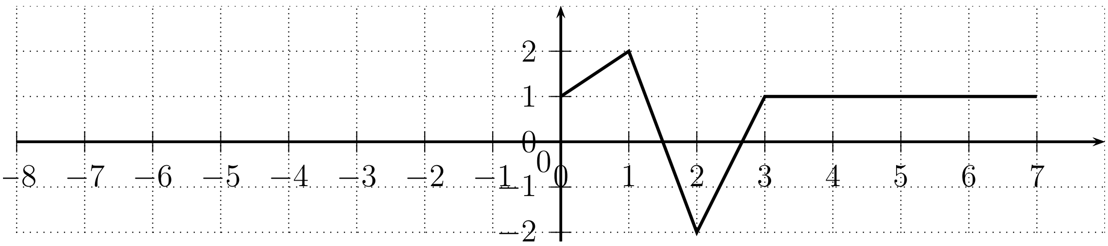
Conséquence graphique
On se place dans un repère orthogonal.
Lorsque f est paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Illustration :



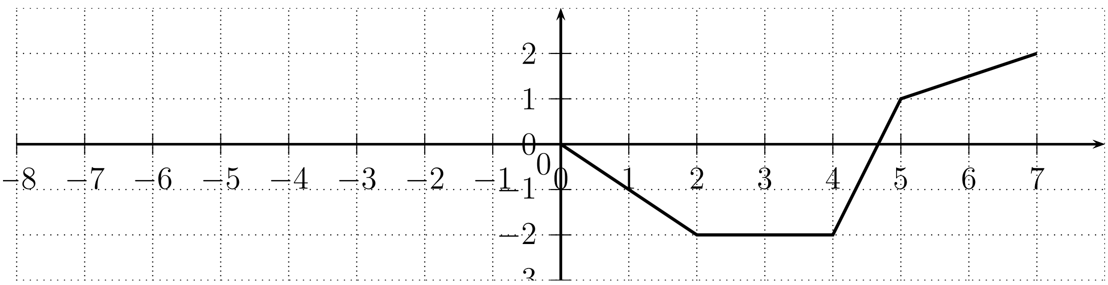
Exemple : La fonction carré est paire.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^2 = x^2$.

Exercice 7
Compléter les courbes de fonctions pour qu'elles représentent des fonctions paires sur $[-7; 7]$.

1. Fonction f.



2. Fonction g



Exercice 8
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5}x^6 - x^2$. Montrer que f est paire.

V.2 Fonctions impaires

Définition
Soit f une fonction définie sur un domaine D symétrique par rapport 0 (si $x \in D$, alors $-x \in D$).
On dit que f est impaire lorsque pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

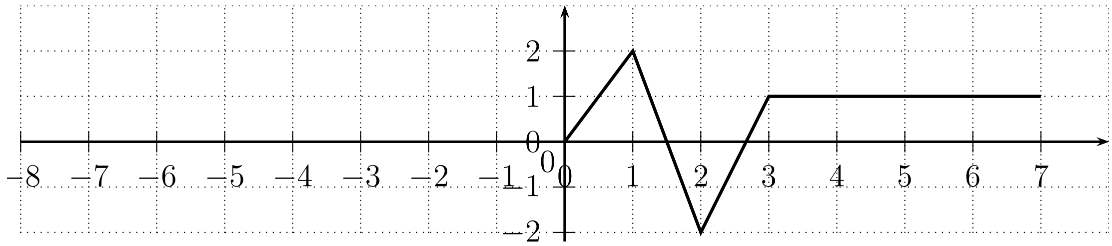
Conséquence graphique
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère (le point O).

Exemple : La fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est impaire.

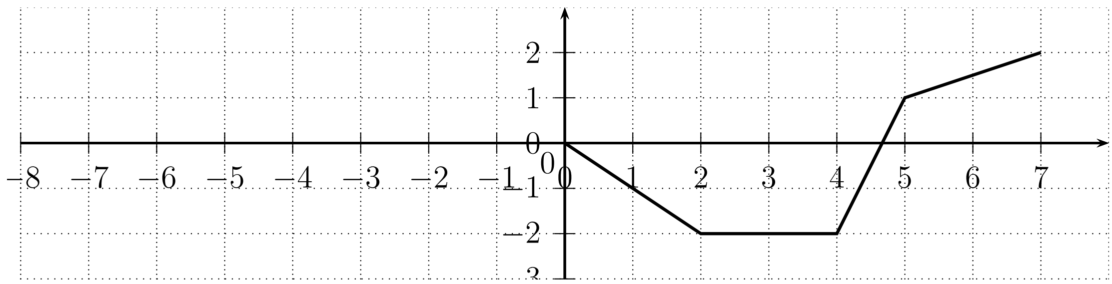
En effet, pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$.

Exercice 9
Compléter les courbes de fonctions pour qu'elles représentent des fonctions impaires sur $[-7; 7]$.

1. Fonction f.



2. Fonction g



Remarque
1. Les fonctions $x \mapsto x^n$ avec n entier pair sont des fonctions paires.
2. Les fonctions $x \mapsto x^n$ avec n impair sont des fonctions impaires.

Remarque
1. Il existe des fonctions ni paire ni impaire (fonction racine carrée, voir aussi l'exercice suivant).
2. Il n'y a qu'une seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire, c'est la fonction nulle (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$).

Exercice 10
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 5x$.
1. Calculer $f(-2)$, puis $f(2)$.
2. Que peut-on en déduire sur la parité de f ?

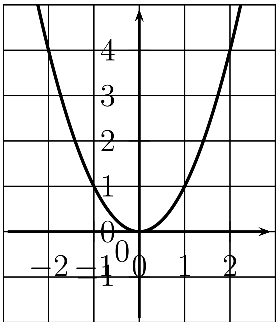
Exercice 11 (recherche des fonctions affines paires ou impaires)
Soient a et b deux réels, et soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

1. Exprimer $f(1)$ et $f(-1)$.
2. (a) Montrer que si f est paire, alors $a = 0$.
   (b) Étudier la réciproque de l'implication précédente, et conclure.
3. (a) Montrer que si f est impaire, alors $b = 0$.
   (b) Étudier la réciproque de l'implication précédente, et conclure.

Quelques exemples avec des fonctions de référence

fonction carré

$f(x) = x^2$

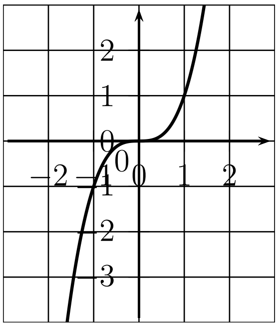


$D_f = \mathbb{R}$

f est paire

fonction cube

$f(x) = x^3$

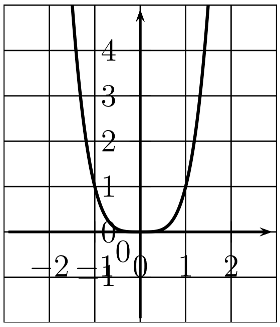


$D_f = \mathbb{R}$

f est impaire

puissance quatrième

$f(x) = x^4$

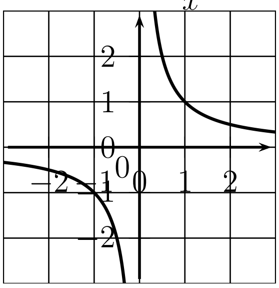


$D_f = \mathbb{R}$

f est paire

fonction inverse

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

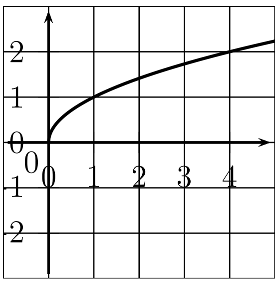


$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

f est impaire

fonction racine carrée

$f(x) = \sqrt{x}$

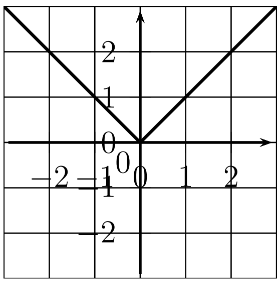


$D_f = [0; +\infty[$

ni paire ni impaire

fonction valeur absolue

$f(x) = |x|$



$D_f = \mathbb{R}$

f est paire