

# Chapitre 1 : Second degré

## I Étude des fonctions trinômes du second degré

### I.1 Activité d'introduction

#### Exercice 1 (avec un algorithme)

On considère l'algorithme suivant :

```
Entrer  $x$ 
 $a$  prend la valeur  $x + 2$ 
 $b$  prend la valeur  $x - 6$ 
 $y$  prend la valeur  $a \times b$ 
Afficher  $y$ 
```

1. Montrer que si l'on entre 8, le nombre affiché en sortie est 20.
2. Quelle est l'expression de la fonction associée à cet algorithme? On note  $f$  cette fonction.
3. Étudier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
  - (a) "l'algorithme renvoie un résultat toujours positif ou nul",
  - (b) " $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ ",
4. Étudier le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
5. (a) Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - 2)^2 - 16$ .  
(b) En déduire que  $f$  admet un minimum de  $-16$  et préciser en quelle valeur il est atteint.

#### Propriété (forme canonique de seconde)

Soit  $f$  une fonction trinôme du second degré définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , avec  $a$ ,  $b$ , et  $c$  réels,  $a \neq 0$ .

Il existe des réels  $\alpha$  et  $\beta$  uniques tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Cette expression est appelée la forme canonique de  $f$ .

Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de  $f$  est une parabole de sommet le point  $S(\alpha; \beta)$ .

La parabole est orientée vers le haut si et seulement si  $a > 0$ .

La parabole est orientée vers le bas si et seulement si  $a < 0$ .

#### Remarque

La droite d'équation  $x = \alpha$  est axe de symétrie de la parabole.

#### Exercice 2 (exploiter la forme canonique)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le tableau de variation puis résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2(x - 5)^2 + 1$ .
2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x + 7)^2 - 9$ .
3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 - 6$

### Exercice 3 (mise sous forme canonique)

Mettre sous forme canonique les fonctions suivantes :

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 10x + 1$ .
2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2x^2 - 24x - 3$ .
3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = x^2 + 3x - 4$ .

### I.2 Forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$

Posons  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , avec  $a \neq 0$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[ x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

En posant  $\Delta = b^2 - 4ac$ ,

$$f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Cette écriture s'appelle la forme canonique de  $f$ .

Le nombre  $\Delta = b^2 - 4ac$  est le discriminant de  $f$ .

### Exercice 4

Déterminer la forme canonique d'une fonction trinôme du second degré : [ressource 107](#)

### I.3 Équation $ax^2 + bx + c = 0$

- Si  $\Delta < 0$ .  
Alors  $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$  et  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$  donc l'équation n'a pas de solution.
- Si  $\Delta = 0$ .  
Alors  $f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$ .  
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$ .  
L'équation  $f(x) = 0$  a une unique solution qui est  $-\frac{b}{2a}$ .

- Si  $\Delta > 0$ , on peut parler de  $\sqrt{\Delta}$ .

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\
 &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] \quad (\text{identité remarquable}) \\
 &= a \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\
 &= a \left( x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)
 \end{aligned}$$

L'équation  $f(x) = 0$  a deux racines réelles :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left( x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

### Théorème (Équation $ax^2 + bx + c = 0$ )

Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Posons  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Si  $\Delta < 0$ ,  $f$  n'a pas de racine réelle, et on ne peut pas factoriser  $f(x)$ .
- Si  $\Delta = 0$ , alors  $f$  a une unique racine (double) qui est  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ , et  $f$  admet la factorisation

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

- Si  $\Delta > 0$ , alors  $f$  a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On a alors la factorisation

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

### Exercice 5

Résoudre l'équation  $x^2 + 7x + 10 = 0$ .<sup>1</sup>

### Exercice 6

1. Calcul mental du discriminant : [ressource 3797](#)
2. Résoudre une équation du second degré : [ressource 108](#)

## I.4 Signe de $ax^2 + bx + c$

- Si  $\Delta < 0$

$$ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

---

1.  $\Delta = 9$ , puis on trouve  $S = \{-5; -2\}$ .

avec  $\left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] > 0$  d'où :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de $a$	

- Si  $\Delta = 0$

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$	+	0	+
$ax^2 + bx + c$	signe de $a$	0	signe de $a$

- Si  $\Delta > 0$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

avec  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

Dans le cas<sup>2</sup> où  $x_1 < x_2$ , on a

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$x - x_1$	-	0	+	+	
$x - x_2$	-	-	0	+	
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	0	+
$a(x - x_1)(x - x_2)$	signe de $a$	0	signe de $(-a)$	0	signe de $a$

### Théorème (Signe du trinôme)

- Si  $\Delta < 0$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $ax^2 + bx + c$  est du signe de  $a$ .
- Si  $\Delta = 0$ , alors pour tout  $x \neq -\frac{b}{2a}$ ,  $ax^2 + bx + c$  est du signe de  $a$ .
- Si  $\Delta > 0$ , alors  $ax^2 + bx + c$  est du signe de  $a$  à l'extérieur des racines, et du signe de  $(-a)$  entre les racines.

### Exercice 7

1. Résoudre une inéquation du second degré : [ressource 2910](#)
2. Inéquation du second degré en trouvant une factorisation (sans calculer  $\Delta$ ) : [ressource 2923](#)

2. sinon, il faut les échanger dans la première ligne du tableau

## I.5 Aspect graphique

### Théorème

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ .

La courbe représentative de  $f$  est une parabole.

Son sommet est le point  $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ .

La droite d'équation  $x = -\frac{b}{2a}$  (parallèle à  $(Oy)$ ) est axe de symétrie de la courbe.

Lorsque  $a > 0$  la parabole est tournée vers le haut.

Lorsque  $a < 0$  la parabole est tournée vers le bas.

Exemple :

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 10x + 23$ .

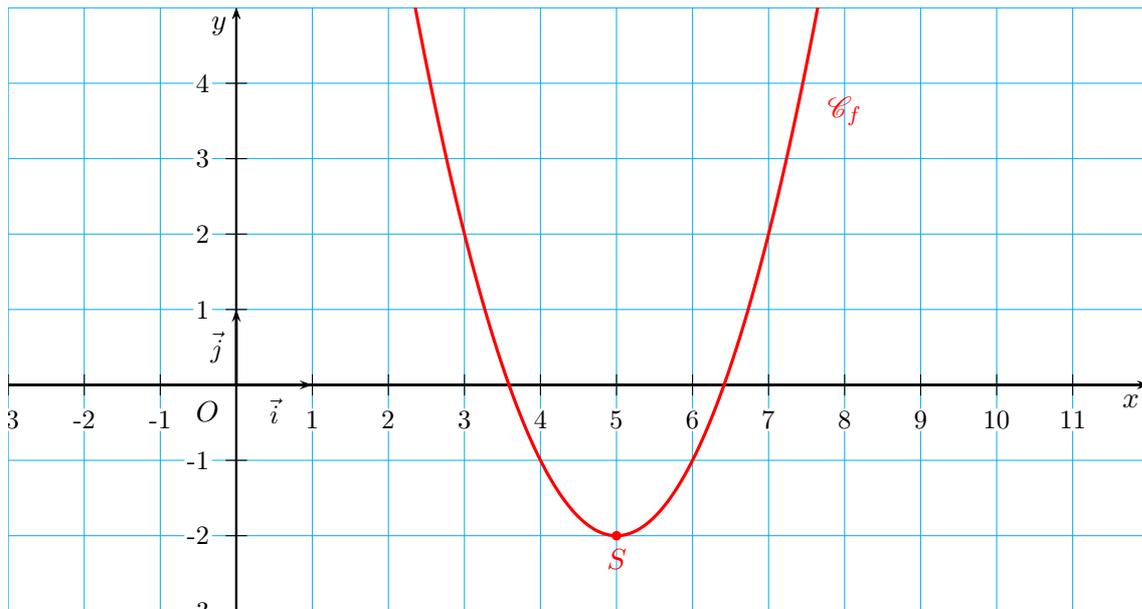
Comme  $a = 1 > 0$ , la parabole est tournée vers le haut.

$$x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{10}{2} = 5.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \times 23 = 8.$$

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-8}{4} = -2.$$

Le sommet de la parabole est le point  $S(5; -2)$ .



### Remarque

1. On peut aussi trouver l'ordonnée du sommet en calculant  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ .

Sur l'exemple précédent,  $y_S = f(5) = 25 - 50 + 23 = -2$ .

2. Lien avec la forme canonique vue en seconde :

Si l'on a une expression de la forme  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ , alors le sommet  $S$  a pour coordonnées  $(\alpha; \beta)$ .

### Exercice 8

1. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole : [ressource 3936](#)
2. Indiquer la nature de l'extremum, sa valeur, et le nombre pour lequel il est atteint : [ressource 3935](#)

## I.6 Algorithme de résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Algorithme TI-82, TI-83

```
: Prompt A,B,C
: B^2-4AC → D
: Disp "Delta=",D
: If D>0
: Then
: Disp "Deux solutions"
: Disp (-B-√(D))/(2A)►Frac, (-B+√(D))/(2A)►Frac
: Else
: If D=0
: Then
: Disp "Une solution"
: Disp (-B)/(2A)►Frac
: Else
: Disp "Pas de solution"
:End
:End
:End
:Pause
:Disp "sommet"
:Disp -B/(2A)►Frac, -D/(4A)►Frac
```

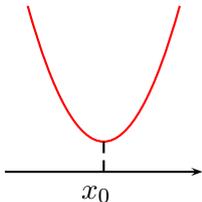
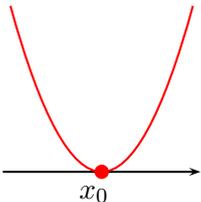
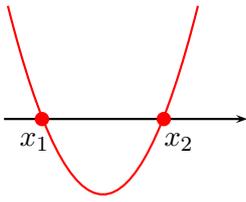
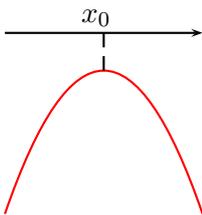
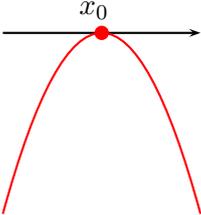
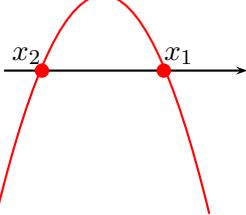
On affiche de plus les coordonnées du sommet de la parabole.

## I.7 Synthèse

$f(x) = ax^2 + bx + c$ , avec  $a \neq 0$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Sommet de la parabole  $S(\alpha; \beta)$  :  $\alpha = -\frac{b}{2a}$ , et  $\beta = -\frac{\Delta}{4a} = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ .

Discriminant	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Équation $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution dans $\mathbb{R}$	Une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation de $ax^2 + bx + c$	Pas de factorisation	$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$
Allure si $a > 0$			
Allure si $a < 0$			
Signe de $ax^2 + bx + c$	Toujours du signe de $a$	Pour $x \neq -\frac{b}{2a}$ , signe de $a$	Signe de $a$ à l'extérieur des racines

## II Complément

### II.1 Somme et produit des racines lorsque $\Delta > 0$

On suppose ici que  $\Delta > 0$ .

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) &= a [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 &= \frac{c}{a} \end{cases}$$

#### **Théorème (Somme et produit des racines)**

1. Si le polynôme  $ax^2 + bx + c$  a des racines (i.e.  $\Delta > 0$ ), leur somme est  $-\frac{b}{a}$  et leur produit est  $\frac{c}{a}$ .
2. Deux nombres ont pour somme  $S$  et pour produit  $P$  si et seulement si ce sont les racines du polynôme  $x^2 - Sx + P$ .

#### **Remarque**

Le second point fournit une méthode pour trouver deux nombres dont on connaît la somme et le produit.

#### **Exercice 9**

Existe-t-il des rectangles dont le périmètre mesure 22 cm et l'aire 24 cm<sup>2</sup> ? Lesquels ?<sup>3</sup>

### II.2 Fonctions polynômes

#### **Définition**

Une fonction  $f$  non nulle est une fonction polynôme s'il existe un entier  $n \geq 0$  et des réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , avec  $a_n \neq 0$ , tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Le nombre entier  $n$  est le degré du polynôme.

Les nombres réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont les coefficients du polynôme.

#### **Remarque**

La fonction nulle est une fonction polynôme. On convient que son degré est  $-\infty$ .

Exemple : Considérons le polynôme  $P(x) = 3 - 2x^4 + 7x^8 - 3x^2$ .

Son degré est ...

Le monôme en  $x^4$  (terme de degré 4) est ...

Le terme de degré 1 est ...

Le terme constant est ...

Le coefficient de  $x^2$  est ...

---

3.  $S = 11$ ,  $P = 24$ ,  $x^2 - 11x + 24 = 0$  : les seules dimensions possibles sont 8 et 3.

### Exercice 10

Soient  $f$  et  $g$  les polynômes donnés par  $g(x) = (4x^2 - 7x + 3)(2x^3 - x)$  et  $h(x) = x^2(2x^2 - 4)(4x^3 - 1)$ .

Sans développer, déterminer

- le degré de  $g$  :
- le degré de  $h$  :
- le terme de plus haut degré de  $g$  :
- le terme de plus haut degré de  $h$  :
- le terme de plus bas degré de  $g$  :
- le terme de plus bas degré de  $h$  :

#### Définition

Le nombre  $a \in \mathbb{R}$  est une racine du polynôme  $f$  lorsque  $f(a) = 0$ .

### Exercice 11

Déterminer les racines du polynôme  $x^3 - 4x$ .

## II.3 Identification de deux polynômes

#### Théorème

Deux fonctions polynômes de même degré sont égales si et seulement si leurs coefficients sont respectivement égaux.

#### Remarque

Deux fonctions polynômes de degré différents ne sont jamais égales.

### Exercice 12

Soit  $f$  définie par  $f(x) = \frac{3x - 5}{x - 2}$ .

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $x \neq 2$ ,  $f(x) = a + \frac{b}{x - 2}$ .

## II.4 Factorisation de polynômes

#### Théorème (Factorisation)

Le nombre  $a$  est racine du polynôme  $f$  si et seulement si on peut mettre  $(x - a)$  en facteur dans l'expression de  $f(x)$ .

Alors, on a

$$f(x) = (x - a)g(x)$$

Intérêt : Si  $\deg(f) = n$  alors  $\deg(g) = n - 1$ .

Exemple :  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 5x + 2$

On remarque que  $f(-1) = 0$ . Donc on peut factoriser  $f(x)$  par  $(x + 1)$ .

Comme  $f$  est de degré 3,  $f(x)$  s'écrit  $f(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$ .

Après identification des coefficients, on obtient  $f(x) = (x + 1)(4x^2 - 7x + 2)$ .