Chapitre 3 : Nombres complexes (1^{re} partie).

I Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition (et théorème)
Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, qui possède les propriétés suivantes :

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est inclus dans $\mathbb{C}$.
2. L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
3. $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
4. Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b réels.

Définition
L'écriture $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z.
a est la partie réelle de z, elle est notée $\mathrm{Re}(z)$.
b est la partie imaginaire de z, elle est notée $\mathrm{Im}(z)$.

Remarque

1. Lorsque $b = 0$, z est un nombre réel.
2. Lorsque $a = 0$, ont dit que z est imaginaire pur.

Exemple :
Soit $z = 3 - 8\mathrm{i}$. Alors $\mathrm{Re}(z) = 3$, et $\mathrm{Im}(z) = -8$.
Le nombre $3\mathrm{i}$ est imaginaire pur.

Exercice 1
Montrer que pour tous réels a et b, $(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$.

Propriété (opérations dans $\mathbb{C}$)
Soient $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ deux nombres complexes sous leur forme algébrique (a, b, a', b' réels).

1. Somme :
$$z + z' = (a + \mathrm{i}b) + (a' + \mathrm{i}b') = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$$
2. Produit :
$$zz' = (a + \mathrm{i}b)(a' + \mathrm{i}b') = aa' - bb' + \mathrm{i}(ab' + ba')$$
3. Inverse : si $z \neq 0$,
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + \mathrm{i}b} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2}$$
4. Quotient : si $z' \neq 0$,
$$\frac{z}{z'} = \frac{a + \mathrm{i}b}{a' + \mathrm{i}b'} = (a + \mathrm{i}b) \times \frac{1}{a' + \mathrm{i}b'}$$

Remarque
Pour l'écriture algébrique d'un nombre complexe, on ne laisse pas de i au dénominateur.
Si le dénominateur est $(a + \mathrm{i}b)$, on multiplie au numérateur et au dénominateur par son conjugué $(a - \mathrm{i}b)$.
Le dénominateur devient $(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$.

Exercice 2
Mettre sous forme algébrique $\dfrac{1}{1-3\mathrm{i}}$ et $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

Remarque
On a $\mathrm{i}^2=-1$, $\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$, et $\mathrm{i}^4=1$.
On en déduit que pour tout entier $n\in\mathbb{Z}$, $\mathrm{i}^{4n}=1$, $\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^{4n+2}=-1$, et $\mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}$.
En particulier, $\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.

Propriété (égalité de deux nombres complexes)
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
Autrement dit, si $z=a+\mathrm{i}b$ et $z'=a'+\mathrm{i}b'$ avec a, b, a', b' réels, alors

$$z=z' \Leftrightarrow (a=a' \text{ et } b=b')$$

Conséquence
Soit $z=a+\mathrm{i}b$ avec a et b réels. Alors,

$$z=0 \text{ si et seulement si } (a=0 \text{ et } b=0).$$

II Conjugué d'un nombre complexe

Définition
Soit $z=a+\mathrm{i}b$, avec a, b réels.
Le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z}=a-\mathrm{i}b$.

Exemple :
$\overline{3+5\mathrm{i}}=3-5\mathrm{i}$.

Remarque
1. $\overline{\overline{z}}=z$.
2. $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$.
3. $z-\overline{z}=2\mathrm{Im}(z)$.

Propriété
Soient z et z' deux nombres complexes.
1. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$.
2. $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.
3. Pour tout entier $n\geqslant 0$, $\overline{z^n}=\overline{z}^n$.
4. Si $z'\neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
5. $z\overline{z}=(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)=a^2+b^2$.
6. z est un nombre réel si et seulement si z est égal à son conjugué.
$$z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$$
7. z est imaginaire pur si et seulement si z est égal à l'opposé de son conjugué.
$$z\in\mathrm{i}\mathbb{R}\Leftrightarrow z=-\overline{z}$$

Démonstration

1. $\overline{(a+\mathrm{i}b)+(a'+\mathrm{i}b')} = \overline{(a+a')+\mathrm{i}(b+b)} = a+a'-\mathrm{i}(b+b') = (a-\mathrm{i}b)+(a'-\mathrm{i}b') = \overline{z}+\overline{z'}$.
2. On procède de même en passant aux formes algébriques.
3. On raisonne par récurrence.
4. On procède comme pour 1.
5. Soit $z=a+\mathrm{i}b$ un nombre complexe sous forme algébrique (a et b réels).
   $z\in\mathbb{R}$ si et seulement si $b=0$.
   Or, $z=\overline{z}$ si et seulement si $a+\mathrm{i}b=a-\mathrm{i}b$, ce qui équivaut à $b=0$.
   On a vu que deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
6. z est imaginaire pur si et seulement si $a=0$. □

III Équation du second degré à coefficients réels

Propriété
Soit l'équation $az^2+bz+c=0$, avec a, b et c réels, $a\neq 0$.
Le discriminant de l'équation est $\Delta=b^2-4ac$.

1. Si $\Delta>0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes :
$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
2. Si $\Delta=0$, l'équation a une solution double réelle $z_0=\dfrac{-b}{2a}$.
3. Si $\Delta<0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes (non réelles) :
$$z_1=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration
On montre le résultat du 3. Les points 1. et 2. ont été vus en première.

On part de la forme canonique, $P(z)=a\left[\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Si $\Delta<0$, alors $-\Delta>0$, et l'on peut écrire $-\Delta=(\sqrt{-\Delta})^2$.
Ainsi, $\Delta=-(\sqrt{-\Delta})^2=\mathrm{i}^2\sqrt{-\Delta}^2=\left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2$.
On peut alors factoriser le polynôme $P(z)$ via une identité remarquable à l'aide de facteurs complexes :

$$\begin{aligned}
P(z) &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]\\
&= a\left(z+\frac{b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Donc l'équation $P(z)=0$ équivaut à $z=\dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z=\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$. □

Exercice 3
Modifier le programme de résolution des équations du second degré à la calculatrice vu en première pour qu'il renvoie la forme algébrique des solutions complexes lorsque $\Delta<0$ (Penser à utiliser la fonction Math ►Frac).

Remarque
Soit c un réel, $c < 0$. L'équation $x^2 = c$ n'a pas de solution réelle.
En revanche, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = c$ a deux solutions conjuguées : $z_1 = \mathrm{i}\sqrt{-c}$ et $z_2 = -\mathrm{i}\sqrt{-c}$.

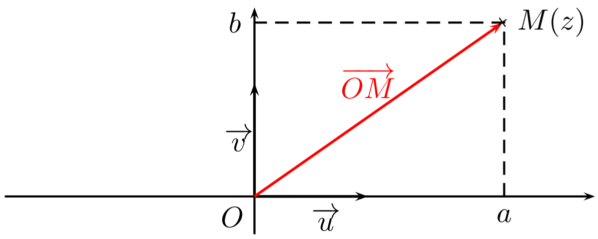
Exercice 4 (calcul mental)
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

1. $z^2 = -9$
2. $z^2 - 1 = 0$
3. $z^2 + \dfrac{1}{4} = 0$.
4. $(z^2 - 5)(z^2 + 36) = 0$.
5. $\overline{z} + 5 - \mathrm{i} = 0$.

IV Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. Il est ainsi appelé plan complexe.

Définition
Soient a et b deux nombres réels.
À tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe un unique point du plan, le point $M(a; b)$.
Réciproquement, à tout point point $M(a; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$.
On dit que M est l'image du nombre complexe z, et que z est l'affixe du point M.
z est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



Propriété

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
2. $z_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w'}} = z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $z_{k\overrightarrow{w}} = kz_{\overrightarrow{w}}$.
4. Si I est le milieu de $[AB]$, $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
   Donc $z_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A + \mathrm{i}(y_B - y_A) = x_B + \mathrm{i}y_B - (x_A + \mathrm{i}y_A) = z_B - z_A$.
2. On raisonne de même en passant aux coordonnées pour montrer les points 2., 3. et 4..