Chapitre 1 : Manipuler les nombres réels

Un peu d'histoire

- Apparition du zéro : vers 500 ans après J.-C.
- Nombres négatifs : ils sont connus en Chine au V$^{\text{e}}$ siècle av. J.-C., mais il faut attendre le XVI$^{\text{e}}$ siècle pour accepter les solutions négatives d'une équation (Albert Girard).
  En France, le premier manuel qui traite des nombres négatifs date de 1886.
- Nombres décimaux : au XV$^{\text{e}}$ siècle, Al-Kashi élabore une écriture décimale des nombres décimaux, reprise et généralisée par Simon Stévin au XVI$^{\text{e}}$ siècle. Les nombre décimaux ne sont définitivement adoptés en France qu'en 1801 avec le système métrique.
- Nombres rationnels : 3000 ans av. J.-C., les Egyptiens utilisent des fractions avec 1 comme numérateur.
  La notation avec un trait de fraction s'impose au XVII$^{\text{e}}$ siècle.
- Nombres irrationnels : Au VI$^{\text{e}}$ siècle av. J.-C., l'école pythagoricienne montre que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- La construction rigoureuse de $\mathbb{R}$ est due à Dedekind et Cantor (XIX$^{\text{e}}$ siècle).

I Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Notations

- Pour exprimer que A est l'ensemble formé par les nombres -1, 2, 9 et 12, on utilise des accolades : $A = \{-1; 2; 9; 12\}$.
- Le nombre 2 appartient à A, on note $2 \in A$. 3 n'appartient pas à A, on note $3 \notin A$.
- Soit B l'ensemble $B = \{2; 12\}$. Comme tous les éléments de B sont dans A, on dit que B est inclus dans A et on note $B \subset A$.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots; 10\,000; \ldots\}$.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs (positifs ou négatifs).

$$\mathbb{Z} = \{\ldots; -10\,001; -10\,000; \ldots; -1; 0; 1; 2; \ldots; 10\,000; \ldots\}$$

I.1 L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux

Définition
Un nombre est décimal s'il peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des nombres décimaux se note $\mathbb{D}$.

Exemple : $-2.34 \in \mathbb{D}$ car $-2,34 = \dfrac{-234}{10^2}$.

Remarque
Tout entier relatif est un nombre décimal. En effet, si $a \in \mathbb{Z}$, $a = \dfrac{a}{10^0}$. Ainsi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

Propriété (admise)
Un nombre est décimal ssi il peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{2^m \times 5^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$.
Les nombres décimaux sont les nombres dont le développement décimal a un nombre fini de chiffres.

I.2 L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

Définition
Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs ($b \neq 0$). On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels.

Exemple : $\dfrac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.

Remarque
Tout nombre décimal est un nombre rationnel : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

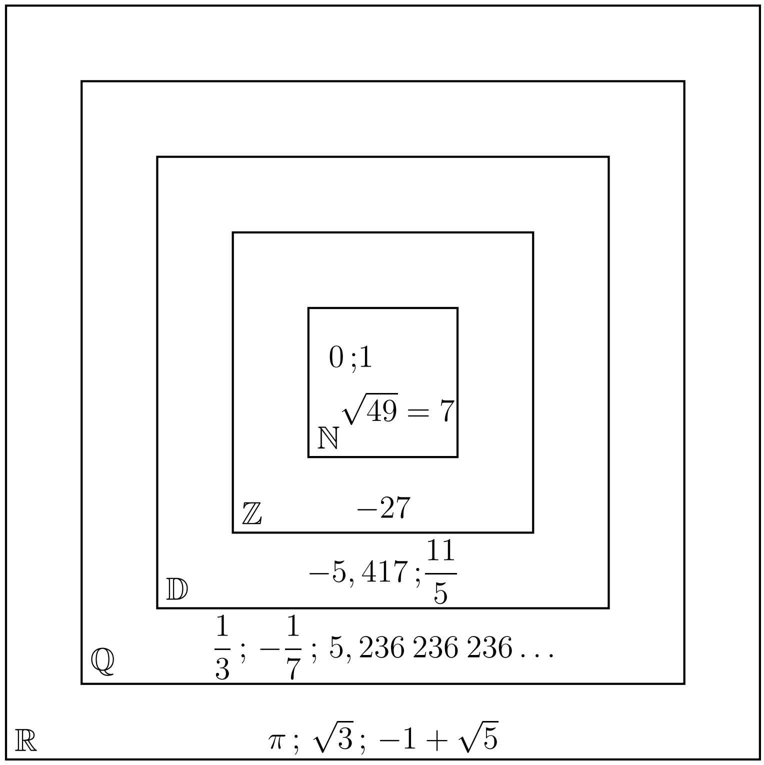
Propriété
Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\dfrac{p}{q}$ irréductible, c'est-à-dire avec $PGCD(p,q) = 1$.
Tous les nombres rationnels ont un développement décimal périodique à partir d'un certain rang.

Exemple :
les nombres suivants sont rationnnels.
$\dfrac{5}{4} = 1,25 = 1,2500000\ldots$, $\dfrac{1}{3} = 0,3333\ldots$, $6 = 6,000\ldots$, $\dfrac{19}{33} = 0.57575757\ldots$.

Remarque
Parmi les nombres rationnels, il y a :
- les nombres décimaux qui ont un développement décimal fini.
- et les nombres rationnels qui ne sont pas décimaux. Ceux-ci ont un développement décimal infini mais avec une période.

Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels (irrationnels), comme par exemple $\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) ou π (périmètre d'un cercle de diamètre 1).
Les nombres irrationnels ont un développement décimal infini non périodique.

I.2.a Synthèse

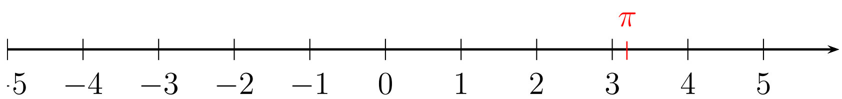


$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

II Intervalles de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

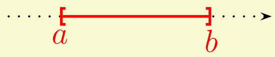
II.1 La droite graduée

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est l'ensemble de tous les nombres connus en seconde. Il contient les rationnels, ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$), et les nombres irrationnels comme par exemple π ou $\sqrt{2}$. On représente l'ensemble des nombres réels par une droite graduée. A chaque point de cette droite correspond un unique nombre réel, et réciproquement.

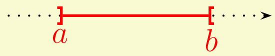


II.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

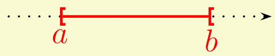
Définition (Intervalles bornés)
Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$.
L'intervalle fermé $[a; b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.



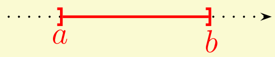
L'intervalle ouvert $]a; b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$.



L'intervalle $[a; b[$ (fermé en a, ouvert en b) est l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$.

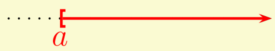


L'intervalle $]a; b]$ (ouvert en a, fermé en b) est l'ensemble des réels x tels que $a < x \leqslant b$.

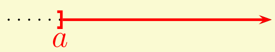


Remarque
Le symbole mathématique pour l'infini est ∞.

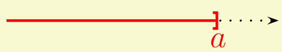
Définition (Intervalles non bornés)
Soit $a \in \mathbb{R}$.
L'intervalle fermé $[a; +\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x \geqslant a$.



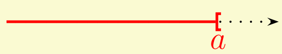
L'intervalle ouvert $]a; +\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x > a$.



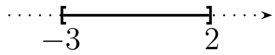
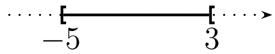
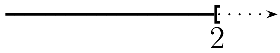
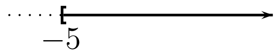
L'intervalle fermé $]-\infty; a]$ est l'ensemble des réels x tels que $x \leqslant a$.



L'intervalle ouvert $]-\infty; a[$ est l'ensemble des réels x tels que $x < a$.



Exemple :

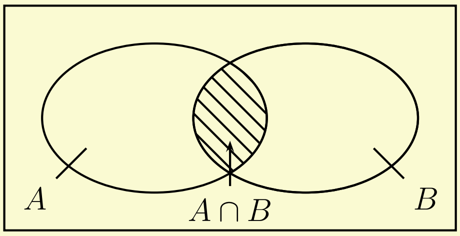
Inégalité	Intervalle	Représentation sur la droite graduée
$-3 \leqslant x \leqslant 2$	$[-3;2]$	
$-5 \leqslant x < 3$	$[-5;3[$	
$x < 2$	$]-\infty;2[$	
$x \geqslant -5$	$[-5;+\infty[$	

Remarque
On ouvre toujours les crochets pour $+\infty$ et $-\infty$.
$\mathbb{R}$ est un intervalle, il s'écrit $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$.

II.3 Intersection et réunion

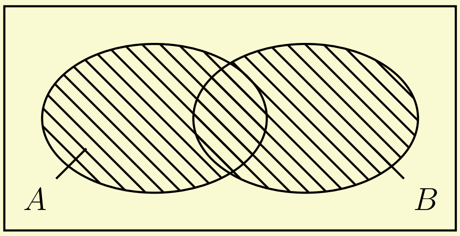
Définition

1. Intersection de deux ensembles.
   L'intersection de deux ensembles est l'ensemble des éléments communs aux deux ensembles.



$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ et } x \in B)$$

2. Réunion de deux ensembles.
   La réunion de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant à au moins l'un des deux ensembles.



$A \cup B$ est la partie hachurée.

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Exercice 1
Traduire à l'aide d'intervalles les conditions suivantes :
a) $x > 1$
b) $x < 2$ et $x \geqslant -5$
c) $x < 0$ ou $x \leqslant 2$
d) $-3 < x \leqslant 1$

Exercice 2
Écrire plus simplement les ensembles suivants :
a) $]-4;5[\ \cap\ [1;10]$.
b) $[-\infty;2[\ \cup\ ]-1;3]$
c) $[1;4]\ \cap\ [6;7]$
d) $]-\infty;-3]\ \cup\ ]-5;+\infty[$
e) $[4;12[\ \cup\ ]-3;15[$

Remarque
Notations particulières :
$\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$.
$\mathbb{R}_- =]-\infty;0]$.
$\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.
$\mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$.
$\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\ \cup\ ]0;+\infty[$.

III Encadrement et approximation de réels par des nombres décimaux

Définition
Un encadrement décimal d'un nombre réel x est une écriture $a \leqslant x \leqslant b$ où a et b sont des nombres décimaux.
L'amplitude de l'encadrement est la différence $b - a$.

Exemple :
$\sqrt{3} \approx 1,732\,051$.
Un encadrement décimal de $\sqrt{3}$ d'amplitude 10^{-2} est $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.

Définition
Soit $n \in \mathbb{N}$. L'arrondi à 10^{-n} près du réel x est le nombre décimal à n chiffres après la virgule le plus proche de x.

Exemple :
$\pi \approx 3,141\,592\,654$.
L'arrondi de π à 10^{-2} est ....
L'arrondi de π à 10^{-3} est ....

IV Valeur absolue

IV.1 Valeur absolue d'un réel

Définition
Soit x un nombre réel. Notons M l'image de x sur la droite graduée réelle. La valeur absolue de x, notée $|x|$, est la distance OM, aussi appelée distance de x à 0.

$$|x| = d(x; 0)$$

Exemple : $|5| = 5$. $|-3| = 3$

Propriété
Si $x \geqslant 0$ alors $|x| = x$.
Si $x < 0$ alors $|x| = -x$.

Remarque
Une valeur absolue est toujours positive ou nulle.
Deux nombres opposés ont la même valeur absolue : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |-x|$.

Exercice 3
Calculer :

1. $a = |4 - 7|$
2. $b = |7 - 4|$
3. $c = 4 - 3|1 - 8|$
4. $d = 2 \times |-3| + \dfrac{1}{2} \times |5|$.

IV.2 Distance et valeur absolue

Propriété
Soient a et b deux nombres réels d'images respectives A et B sur l'axe réel. Alors,

$$AB = d(a;b) = |b - a| = |a - b|$$

Remarque
Par abus de langage, on parle parfois de la distance entre les réels a et b. Alors, $d(a;b) = |a - b|$.

Remarque
Soient a un nombre réel et $r > 0$.
L'ensemble des réels x tels que $|x - a| \leqslant r$ est l'intervalle $[a - r; a + r]$.

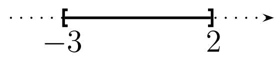
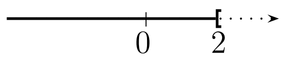
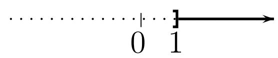
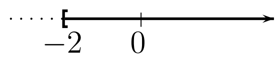
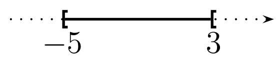
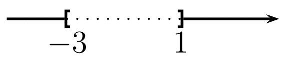
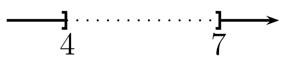
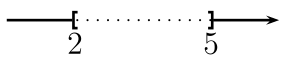
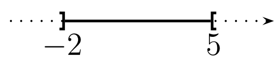
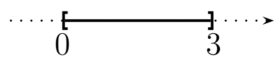
Exercice 4

- Raisonnement et inégalités
  ressource 140
  ressource 3140
- Ou/et, réunion/intersection
  ressource 3154
  ressource 3335
  ressource 3473 (réunion intersection sur des intervalles)

V Exercices corrigés

Exercice 5

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Inégalité	Intervalle ou réunion d'intervalles	Représentation sur la droite graduée
$\boldsymbol{-3 \leqslant x \leqslant 2}$	$[-3; 2]$	
$\boldsymbol{x < 2}$	$\boldsymbol{]-\infty; 2[}$	
$x > 1$	$\boldsymbol{]1; +\infty[}$	
$\boldsymbol{x \geqslant -2}$	$[-2; +\infty[$	
$-5 \leqslant x < 3$	$\boldsymbol{[-5; 3[}$	
$x < -3$ ou $x > 1$	$\boldsymbol{]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[}$	
$\boldsymbol{x \leqslant 4}$ **ou** $\boldsymbol{x > 7}$	$]-\infty; 4] \cup]7; +\infty[$	
$\boldsymbol{x < 2}$ **ou** $\boldsymbol{x > 5}$	$\boldsymbol{]-\infty; 2[\cup]5; +\infty[}$	
$-2 < x < 5$	$\boldsymbol{]-2; 5[}$	
$x \leqslant 3$ et $x \geqslant 0$	$\boldsymbol{[0; 3]}$	

2. On considère les intervalles $I =]-\infty; 5[$ et $J = [-1; 9]$.
   Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.
   $I \cap J = [-1; 5[$.
   $I \cup J =]-\infty; 9]$.