Corrigé du devoir maison n^o 10

1. On a : $BJ=|z_J-z_B|=|\frac{1}{2}i-(-1)|=|1+\frac{1}{2}i|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

   K appartient au segment $[BJ]$, donc $BK=BJ-KI=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

2. (a)
   - A_2 appartient au cercle de centre O et de rayon 1, donc $OA_2=1$, donc $|z_{A_2}|=1$
   - $(\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OA_2})=(\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{OA_1};\overrightarrow{OA_2})\ \ (2\pi)=\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{2\pi}{5}\ \ (2\pi)=\dfrac{4\pi}{5}\ \ (2\pi)$.

     Donc $arg(z_2)=\dfrac{4\pi}{5}\ \ (2\pi)$

   L'affixe de A_2 a pour module 1 et pour argument $\dfrac{4\pi}{5}$. Donc $z_{A_2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}$

   (b) $BA_2{}^2=|z_{A_2}-z_B|^2=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}-(-1)\right|^2=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}+1\right|^2=\left|\cos\dfrac{4\pi}{5}+1+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{5}\right|^2$

   $=\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+1\right)^2+\sin^2\dfrac{4\pi}{5}=\cos^2\dfrac{4\pi}{5}+2\cos\dfrac{4\pi}{5}+1+\sin^2\dfrac{4\pi}{5}=2+2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$

   (c) D'après le logiciel de calcul formel, $\cos\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$ donc :

   $BA_2^2=2+2\times\dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)=2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

   Donc $BA_2=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ d'après le logiciel de calcul formel.

   On en déduit que $BA_2=BK$.

3. Procédé de construction (voir figure ci- dessous) :
   - Soit C le point de coordonnées $(0;\ 1)$. La médiatrice de $[OC]$ coupe l'axe des ordonnées au point J de coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

     On place le point B sur l'axe des abscisses, d'abscisse négative tel que OB = 2OJ, on construit $[BJ]$ et le cercle $\mathcal{C}$ centré en J passant par O donc de rayon $\dfrac{1}{2}$;
   - on obtient le point K à l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et du segment $[BJ]$;
   - le cercle de centre B de rayon BK coupe le cercle unitaire aux points A_2 et A_3 ;
   - la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OA_2})$ coupe le cercle trigonométrique en A_1 ;
   - On termine le pentagone en reportant au compas la longueur A_0A_1 sur le cercle trigonométrique.