NOM : Jeudi 14 février 2019
Prénom :

Devoir n° 7

Exercice 1 (4,5 points)
Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.
2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$.
3. f est définie sur $]4; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5}{8 - 2x}$.
4. f est définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 5}$.

Exercice 2 (3 points)
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction racine carrée définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Soit (d) la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}x - 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique tangente à la courbe $\mathscr{C}$ parallèle à la droite (d).
2. Déterminer une équation de cette tangente.

Exercice 3 (4,5 points)
Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
2. Montrer que pour tout réel $a \neq 0$, la tangente T_a à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation réduite $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$.
3. En déduire le nombre de tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui passent par le point $K(-1; 2)$ (On ne demande pas de déterminer une équation de ces tangentes).

Exercice 4 (8 points)
On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite T_1 est tangente à la courbe en B, et la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A.

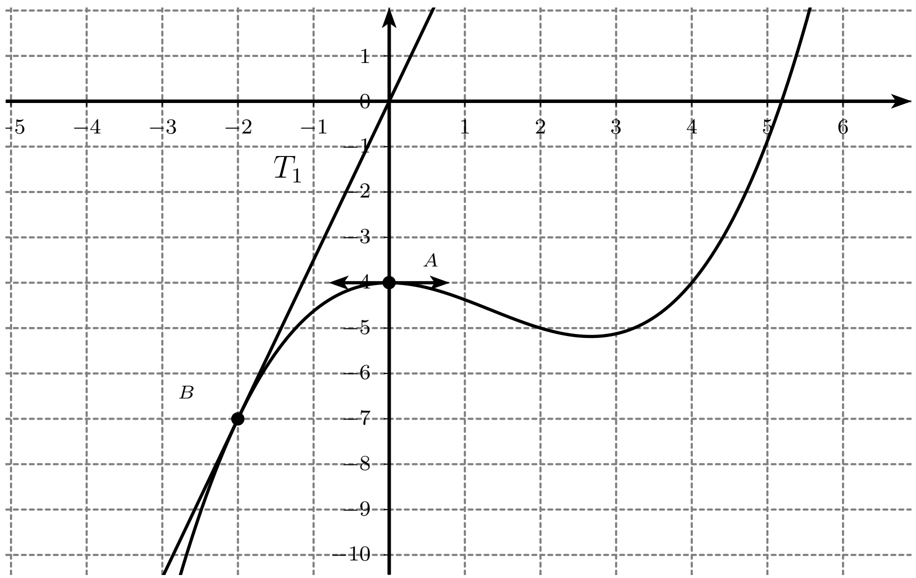
A : Lectures graphiques

1. Lire graphiquement $f(-2)$ et $f(0)$. Aucune justification n'est demandée.
2. Déterminer graphiquement $f'(-2)$ et $f'(0)$. Justifier.

B : Calculs de dérivées et applications

On admet désormais que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{8}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 4$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Vérifier que $f'(4) = 2$ et tracer la tangente associée sur le graphique. On fera apparaître les traits de construction.
3. (a) Montrer que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 est la droite (d) d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x - 4$.
   (b) Tracer (d).
   (c) Étudier par le calcul la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de (d).



NOM :
Prénom :

Exercice 5 (bonus, 3 points)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{(u_n)^2+1}$.

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2+1}$. Représenter sur ce graphique les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). Justifier.
3. Compléter l'algorithme suivant qui détermine et affiche le plus petit entier p tel que $u_p < -6$.

n prend la valeur 0
U prend la valeur ...
Tant que ....
....
....
Fin Tant que
Afficher ...

4. Programmer cet algorithme à la calculatrice et donner la valeur de p.
5. Peut-on affirmer que pour tout $n \geqslant p$, $u_n < -6$? Justifier.