**Seconde. Interrogation de mathématiques n° 10**
**Correction du sujet 2**

## Exercice 1 (cours, 2 points)

Compléter sur l'énoncé.

1. Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan, avec $A \neq B$ et $C \neq D$.
   $(AB)//(CD)$ si et seulement si $\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires.}}$
2. Trois points $A$, $B$ et $C$ du plan sont alignés si et seulement si $\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires.}}$

## Exercice 2 (1 point)

Donner le tableau de variation de la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x^2$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

## Exercice 3 (6 points)

1. Dans chaque cas, comparer $a^2$ et $b^2$. Justifier la réponse.
   (a) $a = -2,3$ et $b = -2,03$.
   On a $-2,3 < -2,03 \leqslant 0$, et la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.
   $\boxed{\text{Donc } (-2,3)^2 > (-2,03)^2.}$
   (b) $a = 5,176$ et $b = 5,183$
   On a $0 \leqslant 5,176 < 5,183$, et la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
   $\boxed{\text{Donc } 5,176^2 < 5,183^2.}$
2. Résoudre les équations suivantes (aucune justification n'est demandée) :
   (a) $x^2 + 4 = 0$.
   $\boxed{\text{Cette équation n'a pas de solution}}$
   (car un carré est toujours positif)
   (b) $x^2 = 11$
   $\boxed{\text{Les solutions sont } -\sqrt{11} \text{ et } \sqrt{11}.}$
3. Dans chaque cas, donner le meilleur encadrement de $x^2$. Justifier la réponse.
   (a) $-5 < x < -1$.
   La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$, donc $(-5)^2 > x^2 > (-1)^2$.
   $\boxed{1 < x^2 < 25}$
   (b) $-3 \leqslant x \leqslant 10$
   La fonction carré n'est pas monotone sur l'intervalle $[-3; 10]$.

| $x$ | $-3$ | $0$ | $10$ |
|---|---|---|---|
| $x^2$ | $9$ $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ $100$ |

   Sur cet intervalle, son minimum est 0 et son maximum est 100.
   $\boxed{0 \leqslant x^2 \leqslant 100}$
   (c) $2 \leqslant x \leqslant 9$
   La fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
   Donc $2^2 \leqslant x^2 \leqslant 9^2$.
   $\boxed{4 \leqslant x^2 \leqslant 81}$

## Exercice 4 (3 points)

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x < 5$, alors $x^2 < 25$.
   $\boxed{\text{Faux}}$
   Contre-exemple avec $x = -7$ :
   $-7 < 5$ et pourtant $(-7)^2 = 49 \geqslant 25$.

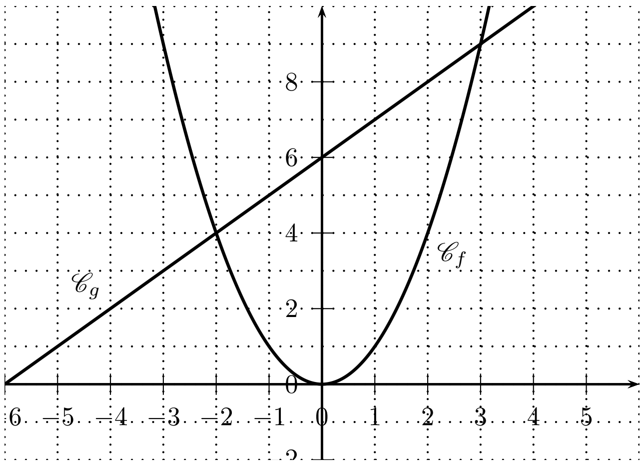
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x^2 < 25$, alors $x < 5$.
   $\boxed{\text{Vrai}}$
   $x^2 < 25$ ssi $x^2 - 25 < 0$ ssi $(x-5)(x+5) < 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-5$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+5$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x-5)(x+5)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   Ainsi, $x^2 < 25$ ssi $x \in ]-5; 5[$.
   L'implication "si $x^2 < 25$, alors $x < 5$" est donc vraie.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x < -3$, alors $x^2 > 9$.
   $\boxed{\text{Vrai}}$
   La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$, donc pour tous réels $a, b \in ]-\infty; 0]$, si $a < b$, alors $a^2 > b^2$.
   On obtient le résultat demandé avec $a = x$ et $b = -3$.

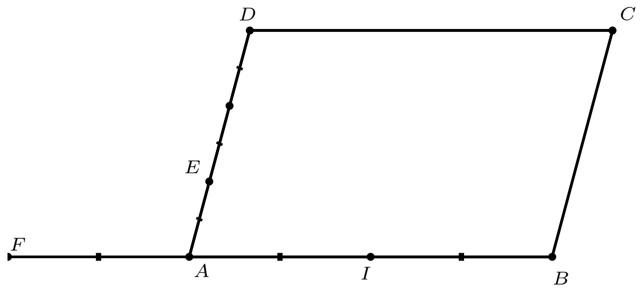
**Exercice 5 (4,5 points)**
Soit $f$ la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x + 6$




1. Tracer ci-dessous la courbe de la fonction $f$. On ne demande pas de justifier.
2. Tracer ci-dessous la représentation graphique de la fonction $g$. Justifier.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
   Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   $\boxed{S = \{-2; 3\}.}$
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = (x+2)(x-3)$.
   $f(x) - g(x) = x^2 - (x+6) = x^2 - x - 6$.
   En développant, $(x+2)(x-3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$.
   $\boxed{\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) - g(x) = (x+2)(x-3)}$
5. En déduire la résolution de l'équation $f(x) = g(x)$ par le calcul.
   $f(x) = g(x)$ ssi $f(x) - g(x) = 0$ ssi $(x+2)(x-3) = 0$ ssi ($x = -2$ ou $x = 3$).
   $\boxed{\text{On retrouve bien le même ensemble solution : } S = \{-2; 3\}.}$

**Exercice 6 (3,5 points)**
$ABCD$ est parallélogramme. On définit les points $E$ et $F$ par :
$\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure. Placer $E$ et $F$.




2. Exprimer $\overrightarrow{CE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
   $\boxed{\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}.}$
   En effet, comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   De même,
   $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
   $\boxed{\overrightarrow{CF} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.}$
4. Montrer que les points $C$, $E$ et $F$ sont alignés.
   On remarque que $\overrightarrow{CF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CE}$.
   $\boxed{\text{Donc les vecteurs } \overrightarrow{CE} \text{ et } \overrightarrow{CF} \text{ sont colinéaires, et les points } C,\ E \text{ et } F \text{ sont alignés.}}$