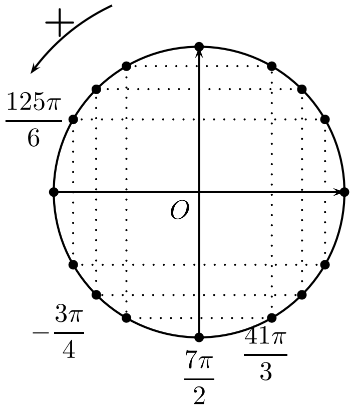
1re G. Correction du devoir n° 5

Exercice 1 (1 point)

Placer sur le cercle ci-contre les images des réels suivants :

$$\frac{7\pi}{2}\ ;\ \frac{-3\pi}{4}\ ;\ \frac{41\pi}{3}\ ;\ \frac{125\pi}{6}.$$



Aucune justification n'est demandée.

$\frac{7\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=2\times 2\pi-\frac{\pi}{2}$, il a la même image que $-\frac{\pi}{2}$.

$\frac{41\pi}{3}=\frac{42\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=7\times 2\pi-\frac{\pi}{3}$.

$\frac{125\pi}{6}=\frac{120\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=10\times 2\pi+\frac{5\pi}{6}$

Exercice 2 (1 point)

Étudier si x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique. Justifier.

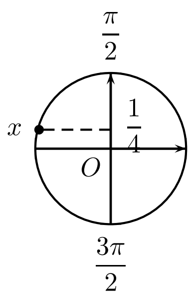
x et y ont la même image sur le cercle ssi $x-y$ est un multiple de 2π.

1. $x=-\frac{17\pi}{4}$ et $y=\frac{15\pi}{4}$.
   $x-y=-\frac{17\pi}{4}-\frac{15\pi}{4}=\frac{32\pi}{4}=8\pi=4\times 2\pi$.
   $\boxed{x \text{ et } y \text{ ont la même image sur le cercle.}}$
2. $x=\frac{7\pi}{9}$ et $y=\frac{52\pi}{9}$.
   $x-y=\frac{7\pi}{9}-\frac{52\pi}{9}=-\frac{45\pi}{9}=-5\pi$, qui n'est pas un multiple de 2π (car -5 est impair). $\boxed{x \text{ et } y \text{ n'ont pas la même image sur le cercle.}}$

Exercice 3 (3 points)

Soit x le réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, tel que $\sin x=\frac{1}{4}$.

1. Placer l'image de x sur le cercle trigonométrique.



2. Déterminer la valeur exacte de $\cos x$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.
   Donc $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$.
   Ainsi, $\cos x=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$ ou bien $\cos x=-\sqrt{\frac{15}{16}}=-\frac{\sqrt{15}}{4}$.
   Comme x appartient à $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, on a $\cos x\leqslant 0$.
   Finalement, $\boxed{\cos x=-\frac{\sqrt{15}}{4}.}$

Exercice 4 (2 points)

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle demandé. Aucune justification n'est demandée. On pourra s'aider du cercle trigonométrique.

1. $\cos(x)=-\frac{1}{2}$ dans $[0;2\pi]$. $\boxed{\text{Les solutions sont } \frac{2\pi}{3} \text{ et } \frac{4\pi}{3}.}$
2. $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0;4\pi]$. $\boxed{\text{Les solutions sont } \frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\ ;\frac{9\pi}{4}\ ;\ \frac{11\pi}{4}.}$

Exercice 5 (4 points)

Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^5+8x^3+2x-4$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ f'(x)=-5x^4+24x^2+2.}$
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=8x^2\sqrt{x}$.
   $\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } x>0,\\ f'(x)=16x\sqrt{x}+8x^2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=16x\sqrt{x}+\frac{4x^2}{\sqrt{x}}=20x\sqrt{x}.\end{array}}$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{11}{5x^2+3}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ f'(x)=11\times\frac{-10x}{(5x^2+3)^2}=\frac{-110x}{(5x^2+3)^2}.}$
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(5x-6)^3$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ f'(x)=5\times 3(5x-6)^2=15(5x-6)^2.}$

Exercice 6 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]-4;+\infty[$ par $f(x)=\frac{3x}{x+4}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Justifier que f est dérivable sur $]-4;+\infty[$, puis vérifier que $f'(x)=\frac{12}{(x+4)^2}$.

Les fonctions $x \mapsto 3x$ et $x \mapsto x+4$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Or, $x+4=0$ ssi $x=-4$, donc $x+4$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]-4;+\infty[$.
Par quotient de fonctions dérivables, f est dérivable sur $]-4;+\infty[$.

$\boxed{\text{Pour tout } x>-4,\ f'(x)=\dfrac{3(x+4)-3x}{(x+4)^2}=\dfrac{12}{(x+4)^2}.}$

2. Justifier que la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 a pour équation $y=3x+3$.
$f(-2)=\dfrac{3\times -2}{-2+4}=-3.$
$f'(-2)=\dfrac{12}{(-2+4)^2}=3.$
$y=f'(-2)(x+2)+f(-2)=3(x+2)-3=3x+3.$
$\boxed{T \text{ a pour équation } y=3x+3.}$

3. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de T.
On étudie le signe de $f(x)-(x+3)$.
$f(x)-(3x+3)=\dfrac{3x}{x+4}-\dfrac{(3x+3)(x+4)}{x+4}=\dfrac{3x-3x^2-15x-12}{x+4}$
$f(x)-(3x+3)=\dfrac{-3x^2-12x-12}{x+4}=\dfrac{-3(x^2+4x+4)}{x+4}=\dfrac{-3(x+2)^2}{x+4}.$
Sur $]-4;+\infty[$, $x+4>0$.
Comme un carré est toujours positif et $-3<0$, $-3(x+2)^2 \leqslant 0$.
Donc, pour tout $x>-4$, $f(x)-(3x+3)\leqslant 0$.

$\boxed{\mathscr{C} \text{ est toujours en dessous de } T \text{ sur }]-4;+\infty[\text{ (avec un point de contact à l'abscisse } -2).}$

4. Soit (d) la droite d'équation $y=\dfrac{1}{3}x+5$.
Montrer que $\mathscr{C}$ admet une unique tangente T' parallèle à (d), et préciser les coordonnées du point de contact de $\mathscr{C}$ avec T'.
$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a, et $T_a//(d)$ ssi elles ont le même coefficient directeur : $\dfrac{1}{3}$.
On résout donc l'équation $f'(x)=\dfrac{1}{3}$.
$\dfrac{12}{(x+4)^2}=\dfrac{1}{3}$, donc $(x+4)^2=36$, puis $(x+4=6$ ou $x+4=-6)$, soit $x=2$ ou $x=-10)$.
Comme on se limite à l'intervalle $]-4;+\infty[$, on ne retient que la solution $x=2$.
$f(2)=\dfrac{3\times 2}{2+4}=1.$

$\boxed{\text{Sur }]-4;+\infty[, \text{ il existe une seule tangente } T' \text{ qui soit parallèle à } (d). \text{ C'est la tangente au point } A(2;1).}$

Exercice 7 (4 points + 1 bonus)
Les questions sont indépendantes.

1. Soit (a_n) la suite définie pour tout entier n par $a_n=\left(3-\dfrac{1}{2}n\right)^2$. Calculer a_0, a_1 et a_2.
$a_0=\left(3-\dfrac{1}{2}\times 0\right)^2=9.$
$a_1=\left(3-\dfrac{1}{2}\times 1\right)^2=\dfrac{25}{4}.$
$a_2=\left(3-\dfrac{1}{2}\times 2\right)^2=4.$

2. Soit (b_n) la suite définie par $b_0=5$ et pout tout $n\geqslant 0$, $b_{n+1}=-\dfrac{2}{3}b_n+1$. Calculer b_1 et b_2.
$b_1=-\dfrac{2}{3}b_0+1=-\dfrac{2}{3}\times 5+1=-\dfrac{7}{3}.$
$b_2=-\dfrac{2}{3}b_1+1=-\dfrac{2}{3}\times\left(-\dfrac{7}{3}\right)+1=\dfrac{23}{9}.$

3. Soit (c_n) la suite définie par $c_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_{n+1}=c_n-n^2+3$. Calculer c_1 et c_2.
$c_1=c_0-0^2+3=3-0+3=6.$
$c_2=c_1-1^2+3=6-1+3=8.$

4. Soit $n\geqslant 4$. On note d_n le nombre de diagonales du polygone régulier à n côtés. (on appelle diagonale toute droite reliant deux sommets non adjacents du polygone).

   (a) Donner d_4, d_5, et d_6.
   $\boxed{d_4=2,\ d_5=5, \text{ et } d_6=9.}$

   (b) Bonus : Donner une expression explicite de d_n en fonction de n. Justifier.
   $\boxed{\text{Pour tout } n\geqslant 4,\ d_n=\dfrac{n(n-3)}{2}.}$
   Il y a $(n-3)$ diagonales partant d'un sommet donné.
   Le total de toutes les diagonales partant de l'ensemble des sommets est donc $n(n-3)$, et chaque diagonale a alors été comptée deux fois (puisqu'elle relie deux sommets). Donc $d_n=\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Exercice 8 (bonus, 1 point)
Montrer qu'il existe deux tangentes à la courbe de la fonction inverse qui passent par le point $K(-1;2)$ (on ne demande pas de donner leur équation).

Soit $a \neq 0$.

$$\begin{array}{rcl} y & = & f'(a)(x-a)+f(a) \\ & = & \dfrac{-1}{a^2}(x-a)+\dfrac{1}{a} \\ & = & \dfrac{-1}{a^2}x+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a} \\ & = & -\dfrac{1}{a^2}x+\dfrac{2}{a} \end{array}$$

La tangente T_a au point d'abscisse a a pour équation réduite $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$.
Soit $a \neq 0$.

$K(-1;2) \in T_a$ ssi $2 = -\dfrac{1}{a^2} \times (-1) + \dfrac{2}{a}$.
ssi $2 = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{2}{a}$
ssi $2 = \dfrac{1+2a}{a^2}$
ssi $2a^2 - 2a - 1 = 0$.
C'est un équation du second degré d'inconnue a.
$\Delta = \text{"}b^2 - 4ac\text{"} = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 12 > 0$.
Cette équation admet donc deux solutions distinctes (et clairement non nulles car 0 n'est pas solution).

$\boxed{\text{Il existe donc deux tangentes à } \mathscr{C}_f \text{ qui passent par le point } K(-1;2).}$