Terminale STI. Spécialité. Correction du contrôle n° 5

Exercice 1 (2 points)

1. Pour tout $a > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = a$ ssi $x = \ln(a)$.
2. Donner 2 propriétés de la fonction logarithme népérien (parmi les propriétés algébriques, sa dérivée, son signe).
   a) Pour tous $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
   b) Pour tout $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Exercice 2 (4 points)

1. Les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{-5x}$, avec $k \in \mathbb{R}$ (car $y' = -5y$).
2. Soit (E') l'équation différentielle $y' = 3y + 12$.
   (a) Les solutions de (E') sont les fonctions f de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{3x} - 4$, avec $k \in \mathbb{R}$.
   (b) La solution de (E') telle que $f(0) = 5$ a pour expression $f(x) = 9\mathrm{e}^{3x} - 4$ (car $K \times 1 - 4 = 5$ ssi $k = 9$).

Exercice 3 (7 points)

1. Exprimer en fonction de $\ln(3)$ le nombre $A = \ln(27) - 2\ln(9) + 5\ln(3)$.
   $A = \ln(3^3) - 2\ln(3^2) + 5\ln(3) = 3\ln(3) - 2 \times 2\ln(3) + 5\ln(3)$
   $A = (3 - 4 + 5)\ln(3) = 4\ln(3)$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $4\ln(x) + \ln(2x) - 2\ln(2) = \ln\left(\dfrac{x^5}{2}\right)$
   $B = 4\ln(x) + \ln(2x) - 2\ln(2) = \ln(x^4) + \ln(2x) - \ln(2^2)$.
   $B = \ln\left(\dfrac{x^4 \times 2x}{2 \times 2}\right) = \ln\left(\dfrac{x^5}{2}\right)$
3. Résoudre les équations suivantes :
   $60 = 10\ln(x) + 120$ $\qquad$ $\mathrm{e}^{1-2x} = 11$
   $60 = 10\ln(x) + 120$ ssi $10\ln(x) = -60$ ssi $\ln(x) = -6$ ssi $x = \mathrm{e}^{-6}$.
   $\boxed{\text{La solution est } \mathrm{e}^{-6}.}$
   $\mathrm{e}^{1-2x} = 11$ ssi $1 - 2x = \ln(11)$ ssi $2x = 1 - \ln(11)$ ssi $x = \dfrac{1 - \ln(11)}{2}$.
   $\boxed{\text{La solution est } \dfrac{1 - \ln(11)}{2}.}$

Exercice 4 (7 points)

Le clinker est un constituant du ciment dont la fabrication nécessite des fours à très haute température qui libèrent dans l'air une grande quantité de dioxyde de carbone (CO_2).
Dans une cimenterie, la fabrication du clinker s'effectue de 7h30 à 20h, dans une pièce de volume 900 000 dm^3.
À 20h, après une journée de travail, le taux volumique de CO_2 dans la pièce est de 0,6 %.

1. Justifier que le volume de CO_2 présent dans cette pièce à 20h est de 5 400 dm^3.
   $900000 \times \dfrac{0,6}{100} = 5400$.
   $\boxed{\text{Donc le volume de } CO_2 \text{ présent dans cette pièce à 20h est de 5 400 dm}^3.}$
2. Soit l'équation (E) : $2y' + 0,02y = 9$
   (a) Déterminer la forme générale des solutions de (E).
   $2y' + 0,02y = 9$ ssi $y' = -0,01y + 4,5$.
   $\boxed{\text{Donc les solutions sont les fonctions } f \text{ de la forme } f(t) = k\mathrm{e}^{-0,01t} - \dfrac{4,5}{-0,01} = k\mathrm{e}^{-0,01t} + 450, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.}$
   (b) Vérifier que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,690]$,
   $V(t) = 4950\mathrm{e}^{-0,01t} + 450$.
   La fonction V vérifie de plus $V(0) = 5400$.
   $k\mathrm{e}^{-0,01\times 0} + 450 = 5400$ ssi $k \times 1 = 5400 - 450$ ssi $k = 4950$.
   $\boxed{\text{Donc } V(t) = 4950\mathrm{e}^{-0,01t} + 450.}$
3. Quel sera, au dm^3 près, le volume de CO_2 dans cette pièce à 21h ?
   21h est une heure, soit 60 minutes après 20h.
   $V(60) = 4950\mathrm{e}^{-0,01\times 60} + 450 \approx 3167$.
   $\boxed{\text{Le volume de } CO_2 \text{ dans cette pièce à 21h est d'environ 3167 dm}^3.}$
4. Les responsables de la cimenterie affirment que chaque matin à 7h30 le taux de CO_2 dans cette pièce est inférieur à 0,06 %. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
   $V(690) = 4950\mathrm{e}^{-0,01\times 690} + 450 \approx 454,99$.
   À 7h30, le volume de CO_2 est d'environ 454,99 dm^3.
   Le taux volumique est $Taux = \dfrac{454,99}{900000} \approx 0,000\,5$, soit environ 0,05 %.
   $\boxed{\text{Le taux volumique est inférieur à 0,06\% à 7h30, les responsables ont raison.}}$