NOM : 25/01/2024
Prénom :

BTS CRSA2. Interrogation de mathématiques n° 6

Exercice 1 (6 points)
Un atelier produit des pièces dont 30 % sont d'excellente qualité. On prélève successivement au hasard 400 pièces dans la production. On note X le nombre de pièces excellentes dans le lot.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. On souhaite approcher X par une variable aléatoire Y suivant une loi normale. Justifier que l'on peut approcher X par une loi normale, et préciser son espérance et son écart-type.
3. Pour la suite, on prendra Y la variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(120; 2\sqrt{21})$. Utiliser Y pour approcher, à 10^{-3} près, les probabilités des événements suivants :
   (a) A : "Il y a plus de 110 pièces d'excellente qualité".
   (b) B : "Il y a entre 100 et 200 pièces d'excellente qualité".
   (c) C : "Il y a moins de 100 pièces d'excellente qualité".
   (d) D : "Le pourcentage de pièces excellentes est supérieur ou égal à 30 %".

Exercice 2 (4 points)
Une entreprise assemble des trains d'atterrissage. Cet assemblage se fait en deux grandes étapes pouvant prendre plus ou moins de temps. La durée de la première partie de l'assemblage suit une loi normale de moyenne 55 minutes et d'écart-type 10 minutes. La durée de la seconde partie de l'assemblage suit une loi normale de moyenne 27 minutes et d'écart type 3 minutes.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque train d'atterrissage, associe la durée totale de son assemblage.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Préciser les paramètres de cette loi.
2. Est-il possible qu'un train d'atterrissage soit assemblé en moins d'une heure ?

Exercice 3 (4 points)
On considère une chaîne de Markov à 3 états possibles : E, F et G. On note M la matrice de transition.

1. Compléter la matrice M pour en faire une matrice de transition.
$$T = \begin{pmatrix} . & 0 & 0,4 \\ 1 & . & . \\ 0,2 & 0,1 & . \end{pmatrix}$$
2. Représenter le graphe (orienté) de la chaîne de Markov.

Exercice 4 (6 points)
Un club de sport propose à ses adhérents deux types d'abonnement :
— l'abonnement de type A qui donne accès à toutes les installations sportives,
— l'abonnement de type B qui, en plus de toutes les installations sportives, donne accès au sauna, au hammam et au jacuzzi.
Chaque adhérent doit choisir un des deux types d'abonnement.
La première année, 85 % des adhérents choisissent l'abonnement de type A. On considère ensuite que 25 % des adhérents ayant un abonnement de type A changent d'abonnement l'année suivante, tandis que 13 % des adhérents ayant un abonnement de type B changent d'abonnement l'année suivante. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note :
— a_n la probabilité qu'un adhérents ait un abonnement de type A la $n^{\text{ième}}$ année.
— b_n la probabilité qu'un adhérent ait un abonnement de type B la $n^{\text{ième}}$ année.
— $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de la $n^{\text{ième}}$ année.

1. Donner P_1.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3. Écrire la matrice de transition M associée à cette situation.
4. Déterminer la matrice P_3.
5. En déduire la probabilité qu'un adhérent choisisse l'abonnement de type A la 3e année.