2de. Correction du devoir maison n° 2

Exercice 1

On donne pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ et $g(x) = -x + 1$.

1. Calculer les images par f et par g de -1, $\sqrt{3}$ et $\dfrac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= -(-1)^2 + 2 \times (-1) + 1 \\ &= -1 - 2 + 1 \\ &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(-1) &= -(-1) + 1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}) &= -(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1 \\ &= -3 + 2\sqrt{3} + 1 \\ &= -2 + 2\sqrt{3} \end{aligned} \qquad g(\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 1$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{5}\right) &= -\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{5} + 1 \\ &= -\frac{1}{25} + \frac{2}{5} + 1 \\ &= -\frac{1}{25} + \frac{10}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g\left(\frac{1}{5}\right) &= -\frac{1}{5} + 1 \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{5}{5} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

2. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

   (a) $\mathscr{C}_f$ passe par le point de coordonnées $(-2; -7)$.
   $f(-2) = -(-2)^2 + 2 \times (-2) + 1 = -4 - 4 + 1 = -7$.
   $\boxed{\text{Oui, } \mathscr{C}_f \text{ passe par le point de coordonnées } (-2; -7).}$

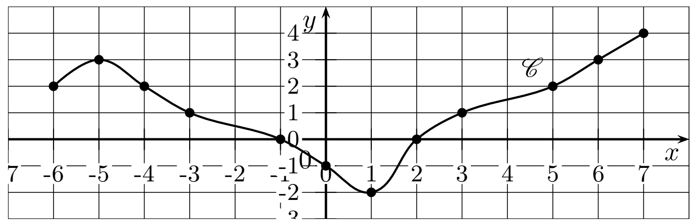
   (b) L'image de 0 par g est 1.
   $g(0) = -0 + 1 = 1$.
   $\boxed{\text{Oui, l'image de 0 par } g \text{ est 1.}}$

   (c) 1 est un antécédent de 2 par f.
   $f(1) = -1^2 + 2 \times 1 + 1 = -1 + 2 + 1 = 2$.
   $\boxed{\text{Oui, 1 est un antécédent de 2 par } f.}$

   (d) Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points d'abscisses 0 et 3.
   $f(0) = 0 + 0 + 1 = 1$.
   $g(0) = -0 + 1 = 1$.
   Donc $f(0) = g(0)$: $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent au point d'abscisse 0.
   $f(3) = -3^2 + 2 \times 3 + 1 = -9 + 6 + 1 = -2$.
   $g(3) = -3 + 1 = -2$.
   Donc $f(3) = g(3)$.
   $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aussi au point d'abscisse 3.
   $\boxed{\text{Oui, } \mathscr{C}_f \text{ et } \mathscr{C}_g \text{ se coupent aux points d'abscisses 0 et 3.}}$

Exercice 2

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
   $\boxed{D_f = [-6; 7].}$
2. Lire graphiquement l'image par f de chacun des réels suivants : -4 ; -1 ; 0 ; 2 ; 3 ; 5.
   $\boxed{f(-4) = 2 \,;\, f(-1) = 0 \,;\, f(0) = -1 \,;\, f(2) = 0 \,;\, f(3) = 1 \,;\, f(5) = 2.}$
3. Rechercher les antécédents de 3 par f.
   $\boxed{\text{Les antécédents de 3 par } f \text{ sont } -5 \text{ et } 6.}$
4. Donner un nombre qui ait un seul antécédent par f.
   -2 admet un seul antécédent qui est 1, ou encore 4 admet un seul antécédent qui est 7.
5. Quel est l'ensemble des valeurs prises par f ?
   $\boxed{\text{L'ensemble des valeurs prises par } f \text{ est } [-2; 4].}$
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$. Expliquer la méthode.
   Les solutions sont les abscisses des points de la courbe de f qui ont une ordonnée égale à 2. $S = \{-6; -4; 5\}$.
7. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$. Expliquer la méthode.
   Les solutions sont les abscisses des points de la courbe de f qui ont une ordonnée strictement positive. $S = [-6; -1[\cup]2; 7]$.

Exercice 3 (75 page 225)

1. Nombre de solutions des équations.
   L'équation $f(x) = 3$ n'a pas de solution.
   L'équation $f(x) = 1$ a trois solutions.
   L'équation $f(x) = -3$ a une seule solution.
2. L'équation $f(x) = m$:
   (a) ne possède aucune solution lorsque $m \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$;
   (b) possède une solution lorsque $m \in \{-3; 2\}$;
   (c) possède deux solutions lorsque $m \in]-3; -1[\cup]1; 2[$;
   (d) possède trois solutions lorsque $m \in [-1; 0[\cup\{1\}$;
   (e) possède quatre solutions lorsque $m \in [0; 1[$.