Correction du devoir maison n° 6

Exercice 1 (61 p 258)

Déterminer la forme trigonométrique.

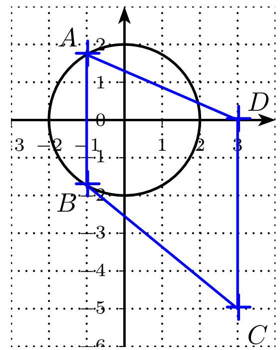
1. $z = 8 - 8\mathrm{i}$.
   $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{8^2+(-8)^2} = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$.
   $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{8}{8\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\qquad \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-8}{8\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Donc $\theta = -\dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.
   $\boxed{\text{Ainsi, sous forme trigonométrique } z = \left[8\sqrt{2}; -\dfrac{\pi}{4}\right].}$
2. $z = -6\mathrm{i}$
   $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0^2+(-6)^2} = 6$.
   $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{0}{6} = 0$. $\qquad \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-6}{6} = -1$. $\qquad$ Donc $\theta = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
   $\boxed{\text{Ainsi, sous forme trigonométrique } z = \left[6; -\dfrac{\pi}{2}\right].}$
3. $z = -3\sqrt{2} - 3\mathrm{i}\sqrt{2}$. Ici, $x = -3\sqrt{2}$, et $y = -3\sqrt{2}$.
   $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3\sqrt{2})^2+(-3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18+18} = 6$.
   $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-3\sqrt{2}}{6} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\qquad \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-3\sqrt{2}}{6} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Donc $\theta = -\dfrac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$.
   $\boxed{\text{Ainsi, sous forme trigonométrique } z = \left[6; -\dfrac{3\pi}{4}\right].}$
4. $z = -4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}$.
   $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2+4^2} = \sqrt{64} = 8$.
   $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-4\sqrt{3}}{8} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\qquad \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$. $\qquad$ Donc $\theta = \dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$.
   $\boxed{\text{Ainsi, sous forme trigonométrique } z = \left[8; \dfrac{5\pi}{6}\right].}$

Exercice 2 (92 p 262)

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$z_A = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_B = \left[2; -\dfrac{2\pi}{3}\right]$, $z_c = 3 - 3\mathrm{i}\sqrt{3}$, et $z_D = 3$.

1. Calculer le module et un argument de z_A et z_C.
   $r_A = |z_A| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$.
   $\cos\theta_A = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-1}{2}$. $\qquad \sin\theta_A = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Donc $\theta_A = \dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$.
   $r_C = |z_C| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+(-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = 6$.
   $\cos\theta_C = \dfrac{x}{r} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. $\qquad \sin\theta_C = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.
   Donc $\theta_C = -\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } z_A = \left[2; \dfrac{2\pi}{3}\right], \text{ et } z_C = \left[6; -\dfrac{\pi}{3}\right].}$
2. Placer les points.
   On utilise les formes trigonométriques, sauf pour $D(3;0)$ d'après le forme algébrique $z_D = 3$.



3. Montrons que $\overrightarrow{DC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
   Déterminons d'abord la forme algébrique de z_B.
   $x = r\cos\theta = 2\cos\dfrac{-2\pi}{3} = 2 \times \dfrac{-1}{2} = -1$.
   $y = r\sin\theta = 2\sin\dfrac{-2\pi}{3} = 2 \times \dfrac{-\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$.
   $\boxed{\text{Donc } z_B = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.}$
   $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3} - (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = -2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 3 - 3\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 = -3\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   On a donc $\dfrac{3}{2}z_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{3}{2} \times (-2\mathrm{i}\sqrt{3}) = -3\mathrm{i}\sqrt{3} = z_{\overrightarrow{DC}}$.
   $\boxed{\text{Donc } \overrightarrow{DC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}.}$
4. Nature du quadrilatère $ABCD$.
   Comme $\overrightarrow{DC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires, donc $(AB)//(DC)$.
   De plus les longueurs AB et DC ne sont pas égales.
   Le quadrilatère $ABCD$ a deux côtés opposés parallèles mais de longueurs différentes.
   $\boxed{ABCD \text{ est un trapèze.}}$