Systèmes

12 ✶ Résoudre les systèmes suivants. Pour chaque cas, préciser la méthode utilisée.

a. $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+3y-z=4 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 3x+2y-z=2 \\ -5x-5y+4z=-1 \end{cases}$.

13 ✶ Résoudre le système suivant à l'aide d'une matrice :

$$\begin{cases} 3x+4y+2z=2 \\ 5x-2y-z=-1 \\ x-4y+3z=13 \end{cases}.$$

14 ✶✶ On donne les matrices :

$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit $A\times B$.
2. Qu'en déduit-on ?
3. Calculer le produit $A\times C$ et montrer que le résultat est solution du système :

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x+\frac{1}{5}y-\frac{1}{5}z=1 \\ -\frac{1}{5}y+\frac{2}{5}z=-5 \\ -\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y+\frac{1}{5}z=3 \end{cases}.$$

15 ✶✶ TICE 1. Déterminer une matrice M avec trois lignes et trois colonnes telle que, pour tout vecteur colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, l'égalité $M\times\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a+b \\ a+b+c \end{pmatrix}$ est vérifiée.

2. Déterminer l'inverse de M à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel.

3. Résoudre le système $\begin{cases} x=1 \\ x+y=3 \\ x+y+z=9 \end{cases}$ de deux façons différentes.

Pour maîtriser

16 ✶✶ CORRIGÉS, p. 247 Étant donné un réel a, on considère la matrice $M(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la matrice $M(0)$?
2. Calculer $M(a+b)$ pour tous réels a et b.
3. Calculer $M(a)\times M(b)$ pour tous réels a et b. À quelle matrice est-ce égal ?
4. Le réel a étant donné, déterminer le réel b tel que $M(a)\times M(b)=I$.

Dans les **exercices 17 à 19**, A est une matrice. On appelle transposée de A la matrice notée ${}^tA$ telle que les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$. Ainsi, si on pose $B={}^tA$, on a pour tous i, j : $b_{i,j}=a_{j,i}$.

17 ✶✶✶ 1. a. On donne :

$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer ${}^tA$, ${}^tB$, ${}^tA+{}^tB$ et ${}^t(A+B)$.

b. On donne $C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tC$.

Que remarque-t-on ?

c. Montrer que pour toute matrice A, ${}^t({}^tA)=A$.

d. Calculer $A\times{}^tA$ et ${}^tA\times A$ avec $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. A est une matrice. On dit que A est une matrice symétrique si ${}^tA=A$, et on dit que A est une matrice anti-symétrique si ${}^tA=-A$.

a. La matrice $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ est-elle symétrique ?

b. On pose $a_{i,j}=i-j$, pour tous i et j. La matrice $A=\left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq 3}$ est-elle symétrique ? anti-symétrique ?

c. Soit A une matrice. Montrer que la matrice $\frac{A+{}^tA}{2}$ est une matrice symétrique.

Montrer que la matrice $\frac{A-{}^tA}{2}$ est une matrice anti-symétrique.

d. En déduire que toute matrice A s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

18 ✶✶ Montrer que ${}^t(AC)={}^tA\,{}^tC$.

19 ✶✶ Montrer que ${}^t\left(A^{-1}\right)=\left({}^tA\right)^{-1}$.

20 ✶✶ CORRIGÉS, p. 247 Montrer que pour toutes matrices A et B, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.