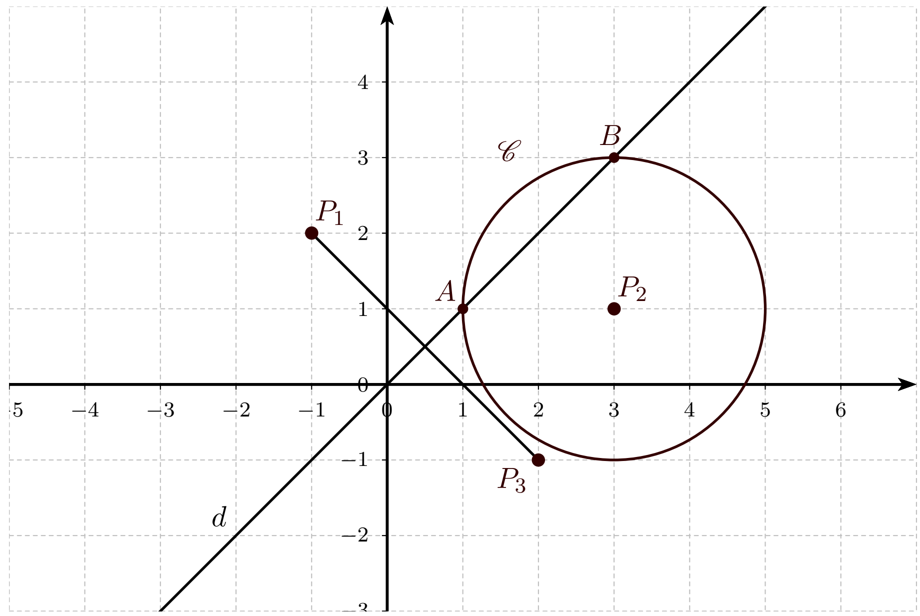
1G - groupes 8 et 9 - Spécialité mathématiques
Correction du travail à distance n°5

Exercice 1 (119 page 269 – Le trésor caché)
Les trois phares sont donnés par $P_1(-1;2)$, $P_2(3;1)$, et $P_3(2;-1)$. Un trésor est situé à égale distance de P_1 et P_3 et à deux km de P_2. Déterminons où peut se trouver le trésor.
Notons T le point où se trouve le trésor.
Comme $TP_1 = TP_3$, donc T est équidistant de P_1 et P_3, il se trouve sur la médiatrice du segment $[P_1P_3]$. Notons d cette droite.
Comme $TP_2 = 2$, T est aussi sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre P_2 et de rayon 2.
On va déterminer une équation de d et une équation de $\mathscr{C}$.
d est la droite passant par le milieu I de $[P_1P_3]$ et de vecteur normal $\overrightarrow{P_1P_3}$.
$x_I = \dfrac{x_{P_1} + x_{P_3}}{2} = \dfrac{-1+2}{2} = \dfrac{1}{2}$.
$y_I = \dfrac{y_{P_1} + y_{P_3}}{2} = \dfrac{2+(-1)}{2} = \dfrac{1}{2}$.
Donc $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.
Comme $\overrightarrow{P_1P_3}(3;-3)$ est normal à d, d a une équation de la forme $3x - 3y + c = 0$.
Comme $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, on a $\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} + c = 0$, soit $c = 0$.
d a pour équation $3x - 3y = 0$, ou encore $y = x$.
Comme $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $P_2(3;1)$ et de rayon 2, une équation de $\mathscr{C}$ est $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2$.
Pour déterminer l'intersection de $\mathscr{C}$ et de d, on résout le système $\begin{cases} y = x \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2 \end{cases}$.
Il vient $(x-3)^2 + (x-1)^2 - 4 = 0$, soit $2x^2 - 8x + 6 = 0$, ou $x^2 - 4x + 3 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4 > 0$.
Il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-2}{2} = 1$.
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+2}{2} = 3$.
Comme $y = x$, les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et d sont $A(1;1)$ et $B(3;3)$.
Le trésor se situe est $A(1;1)$ ou en $B(3;3)$.



Exercice 2 (95 page 90 – Le globetrotter)

1. (a) $d_1 = 50$.
   $d_2 = 50 - 0,01 \times 50 = 49,5$
   $d_3 = 49,5 - 0,01 \times 49,5 = 49,005$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = d_n - 0,01d_n = d_n \times (1 - 0,01) = 0,99 \times d_n$.

   (c) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = 0,99d_n$, la suite (d_n) est géométrique de raison 0,99.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = d_1 \times q^{n-1} = 50 \times 0,99^{n-1}$.

2. Distance L_n parcourue au bout de n jours.
   $L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$, c'est la somme des n premiers termes de la suite géométrique.
   D'après le cours, on a $L_n = d_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q} = 50 \times \dfrac{1-0,99^n}{1-0,99} = 5000(1 - 0,99^n)$.

3. Justifier que $L_n < 5000$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Interpréter.
   On a $0,99 > 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,99^n > 0$.
   Il vient donc $1 - 0,99^n < 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n < 5000$.
   Le globetrotter ne réussira pas son pari de parcourir 5000 km.

4. Nombre N de jours nécessaires pour parcourir 4999 km.
   La suite (L_n) est croissante (évident d'après le contexte).
   Mathématiquement, comme $0 < 0,99 < 1$, la suite $(0,99^n)$ est décroissante et (L_n) est croissante.
   Avec la calculatrice, $L_{847} \approx 4998,9 < 4999$, et $L_{848} \approx 4999,005 > 4999$.
   Il faudra 848 jours pour parcourir 4999 km.

Exercice 3 (104 page 92 – Problème de synthèse)

1. $C_0 = 5000$, $C_1 = 5000 + 250 = 5250$, et $C_2 = 5250 + 250 = 5500$.
   $K_0 = 5000$, $K_1 = 5000 + 0,04 \times 5000 = 5200$, et $K_2 = 5200 + 0,04 \times 5200 = 5408$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = C_n + 250$.
   Donc (C_n) est arithmétique de raison $r = 250$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_{n+1} = K_n + 0,04 \times K_n = K_n/times(1 + 0,04) = 1,04K_n$.
   Donc (K_n) est géométrique de raison $q = 1,04$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = C_0 + nr = 5000 + 250n$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n = K_0 \times q^n = 5000 \times 1,04^n$.

4. Au bout de 6 ans.
   $C_6 = 5000 + 250 \times 6 = 6500$.
   $K_6 = 5000 \times 1,04^6 \approx 6326,60$.

5. Durée au bout de laquelle le capital aura doublé. Cette durée dépentd-elle du montant initial.
   Pour la formule A.
   $C_n \geqslant 2 \times C_0$ ssi $5000 + 250n \geqslant 10000$ ssi $250n \geqslant 5000$ ssi $n \geqslant 20$.
   Le capital aura doublé au bout de 20 ans.
   De façon générale, $C_0 + 250n \geqslant 2C_0$ ssi $n \geqslant \dfrac{C_0}{250}$, donc la durée dépend du montant initial dans ce cas.
   Pour la formule B.
   $K_n \geqslant 2K_0$ ssi $5000 \times 1,04^n \geqslant 10000$ ssi $1,04^n \geqslant 2$.
   La suite $(1,04^n)$ est croissante car $1,04 > 1$.
   $1,04^{17} \approx 1,94 < 2$ et $1,04^{18} \approx 2,03 > 2$.
   Avec la formule B, le capital est doublé au bout de 18 ans.
   De façon générale, $K_0 \times 1,04^n \geqslant 2K_0$ ssi $1,04^n > 2$.
   Cette durée est indépendante du montant initial.

Exercice 4 (69 page 177)

1. $e^{5x+1} = e \times e^{2x}$ ssi $e^{5x+1} = e^{2x+1}$ ssi $5x + 1 = 2x + 1$ ssi $x = 0$.
   L'équation admet une solution qui est 0.
2. $(e^x - e^2)(e^{-x} + 5) = 0$
   ssi $e^x - e^2 = 0$ ou $e^{-x} + 5 = 0$.
   Or, $e^x - e^2 = 0$ ssi $e^x = e^2$ ssi $x = 2$.
   Et comme une exponentielle est toujours strictement positive, $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, et donc l'équation $e^{-x} + 5 = 0$ n'a pas de solution.
   L'équation $(e^x - e^2)(e^{-x} + 5) = 0$ admet une seule solution qui est 2.

Exercice 5 (70 page 177)

1. $3e^{3x-42} + 1 = 4$ ssi $3e^{3x-42} = 3$ ssi $e^{3x-42} = 1$.
   Or, on sait que $e^0 = 1$.
   L'équation équivaut à $e^{3x-42} = e^0$ soit $3x - 42 = 0$, ou encore $x = 14$.
   L'équation a une seule solution qui est 14.
2. $e^{5x} = \dfrac{e^{-x}}{e}$ ssi $e^{5x} = e^{-x-1}$ ssi $5x = -x - 1$ ssi $x = -\dfrac{1}{6}$.
   L'équation a une seule solution qui est $-\dfrac{1}{6}$.

Exercice 6 (72 page177)

1. $X^2 + 6X - 7 = 0$.
   C'est une équation du second degré.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 36 + 28 = 64 > 0$.
   $X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6 - 8}{2} = -7$.
   $X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6 + 8}{2} = 1$.
   Les solutions sont -7 et 1.
2. Équation $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$.
   On note que $e^{2x} = (e^x)^2$.
   Donc, en posant $X = e^x$, on se ramène à l'équation $X^2 + 6X - 7 = 0$ de la question 1.
   Il vient donc $X = -7$ ou $X = 1$.
   Ainsi,$e^x = -7$ ou $e^x = 1$.
   L'équation $e^x = -7$ n'a pas de soltion réelle car $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.
   L'équation $e^x = 1$ équivaut à $e^x = e^0$, et donc à $x = 0$.
   L'équation $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$ a une seule solution qui est 0.

Exercice 7 (78 page 177)

1. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-2e^{2x} + e^x + 1 = (2e^x + 1)(1 - e^x)$.
   En développant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $(2e^x + 1)(1 - e^x) = 2e^x - 2e^{2x} + 1 - e^x = -2e^{2x} + e^x + 1$.
2. Signe de $-2e^{2x} + e^x + 1$.
   On utilise la forme factorisée $-2e^{2x} + e^x + 1 = (2e^x + 1)(1 - e^x)$.
   Comme une exponentielle est toujours strictement positive, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x > 0$, et $2e^x + 1 > 0$.
   $1 - e^x > 0$ ssi $e^x < 1$ ssi $e^x < e^0$ ssi $x < 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2e^x + 1$		$+$		$+$	
$1 - e^x$		$+$	0	$-$	
$(2e^x + 1)(1 - e^x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 8 (98 page 179)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (1+2x)\mathrm{e}^{3x}$.

1. Variations de f.
   Par produit de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{3x} + (1+2x) \times 3\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}[2+3(1+2x)] = (6x+5)\mathrm{e}^{3x}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{3x} > 0$.
   Donc $f'(x)$ le même signe que $6x+5$.
   $6x+5=0$ ssi $x = -\dfrac{5}{6}$.
   $f(-\dfrac{5}{6}) = \left(1 - 2 \times \dfrac{5}{6}\right)\mathrm{e}^{-\frac{15}{6}} = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}} \approx -0,05$.

x	$-\infty$		$-5/6$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}$	$\nearrow$	

2. Équation de la tangente au point d'abscisse 0.
   Une équation de cette tangente T est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
   $f(0) = (1+2\times 0)\mathrm{e}^{3\times 0} = 1 \times 1 = 1$.
   $f'(0) = (6\times 0 + 5) \times \mathrm{e}^{3\times 0} = 5 \times 1 = 5$.
   $y = 5(x-0)+1 = 5x+1$.
   La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 5x+1$.
3. Position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
   Cela revient à étudier le signe de $f(x) - 0 = f(x)$.
   $f(x) = (1+2x)\mathrm{e}^{3x}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{3x} > 0$.
   Donc $f(x)$ le même signe que $1+2x$.
   $1+2x = 0$ ssi $x = -\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

   $\mathscr{C}$ est en-dessous de l'axe des abscisses sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[$.
   $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $\left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

Exercice 9 (103 page 179)
Notons g la fonction exponentielle, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, T la tangente au point d'abscisse 1.

1. Il semble que $\mathscr{C}$ soit toujours au-dessus de la tangente T.
2. $g(x) = \mathrm{e}^x$.
   Équation de la tangente au point d'abscisse 1.
   $y = g'(1)(x-1) + g(1)$.
   $g(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
   Comme $g'(x) = \mathrm{e}^x$, on a $g'(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
   D'où $y = \mathrm{e}(x-1) + \mathrm{e} = \mathrm{e}x$.
   T a pour équation $y = \mathrm{e}x$.
3. On pose $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}x$.
   (a) $f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}$.
       $f'(x) > 0$ ssi $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^1$ ssi $x > 1$.

(b) Signe de $f'(x)$ et variations de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$f(1) = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e} \times 1 = 0.$

4. Conclusion.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geqslant 0$ (puisque le minimum de la fonction f est 0).
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}x$.
   $\mathscr{C}$ est toujours au-dessus de T.

Exercice 10 (120 page 269)
On donne $A(3;4)$, $B(9;3)$ et $C(11;2)$.

1. $\overrightarrow{AB}(6;-1)$, et $\overrightarrow{AC}(8;-2)$.
   $xy' - yx' = 6 \times (-2) - (-1) \times 8 = -4 \neq 0$.
   Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.
   On en déduit que le triangle ABc n'est pas aplati.
   On en déduit qu'il existe un unique cercle passant par ces trois points.
   Le cercle circonscrit au triangle a pour centre le point de concours des médiatrices (ce point existe d'après ce qui précède, ABC n'est pas aplati).
   Solution non détaillée pour déterminer les éléments caractéristiques du cercle :
   Équation de la médiatrice de $[AB]$: $-6x + y + 32,5 = 0$.
   Équation de la médiatrice de $[AC]$: $-4x + y + 25 = 0$.
   Leur point d'intersection est le centre du cercle, $K(3,75;-10)$.
   Le rayon du cercle est la distance $AK = \dfrac{\sqrt{3145}}{4}$.
   Équation du cercle : $(x - 3,75)^2 + (y + 10)^2 = 196,5625$.
2. L'asserton suivant est-elle vraie : "Pour tous points A, B et C, il existe un cercle passant par A, B et C".
   C'est faux lorsque les points sont alignés.
   Dans ce cas les médiatrices des côtés ne sont pas concourantes, elles sont parallèles.
   Par exemple, si $A(0;0)$, $B(1,0)$, et $C(5;0)$, il n'y a pas de cercle circonscrit.

Exercice 11 (123 page 101 – Le château de cartes)

1. Notons u_n le nombre de cartes pour un chateau de n étages ($n \geqslant 1$).
   On a $u_1 = 3\times 1-1 = 2$, $u_2 = 3(1+2)-2 = 7$ et de façon générale, on a $u_n = 3(1+2+\cdots+n)-n$.
   Explication :
   Il faut 3 cartes pour former un triangle avec une base horizontale.
   Il y a $(1 + 2 + \cdots + n)$ triangles dans le château, d'où $3(1 + 2 + \cdots + n)$ cartes, et l'on doit enlever les n cartes comptées en trop au sol à la base pour l'étage de largeur n.
   Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 3(1 + 2 + \cdots + n) - n = 3\dfrac{n(n+1)}{2} - n = \dfrac{3n^2 + n}{2}$.
2. On dispose de $4 \times 52 = 208$ cartes au maximum.
   On cherche le plus grand entier tel que $u_n \leqslant 208$.
   Il est clair que (u_n) est croissante d'après son expression (somme de suites croissantes).
   $u_{11} = 187 \leqslant 208$ et $u_{12} = 222 > 208$.
   On peut construire un château d'au maximum 11 étages avec 4 paquets de 52 cartes.