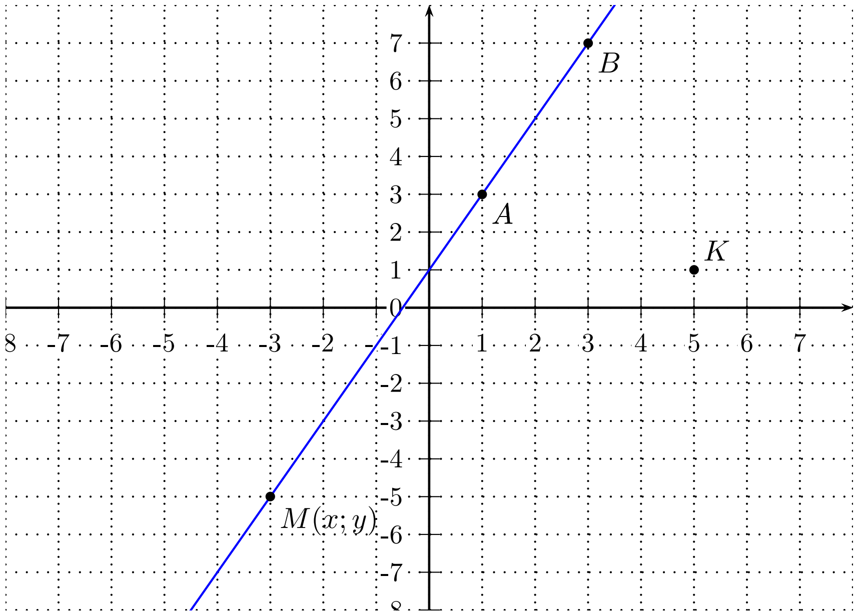
Chapitre 13 : Équations de droites. Systèmes

Dans tout ce chapitre on se place dans un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ du plan.

I Équations de droites

Rappel (chapitre sur les vecteurs)
Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si ....
Exemple d'introduction
Soient $A(1;3)$ et $B(3;7)$. Soit $M(x;y)$ un point du plan.
On souhaite caractériser l'alignement de M avec A et B sur ses coordonnées.



$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. De même, il vient $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

On dit que $y = 2x + 1$ est une équation de la droite (AB).
Une autre équation de la droite (AB) est $2x - y + 1 = 0$ (équivalente).
Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation $y = 2x + 1$.
Par exemple, on vérifie que $A(1;3) \in D$.
En effet, $2x_A + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 = y_A$.
Comme $y_A = 2x_A + 1$, les coordonnées de A vérifient l'équation de D.
Par contre, $K(5;1) \notin D$ car $y_K \neq 2x_K + 1$.

Définition
Une équation (cartésienne) de droite est une égalité sur les coordonnées $(x;y)$ d'un point M qui caractérise l'appartenance du point M à la droite :
- lorsque les coordonnées de M vérifient l'équation, le point M est sur la droite,
- lorsque les coordonnées de M ne vérifient pas l'équation, M n'est pas sur la droite.

Théorème (et définition)
La forme générale des équations de droites est $ax+by+c=0$ (avec a ou b non nul, ce qui signifie $(a;b)\neq(0;0)$).
On peut toujours se ramener à l'un des deux cas suivants :

- $y=mx+p$ pour les droites non parallèles à l'axe des ordonnées.
  m est le coefficient directeur, p est l'ordonnée à l'origine.
- $x=c$ pour les droites parallèles à l'axe des ordonnées.

Remarque

1. Les droites non parallèles à (Oy) sont les courbes représentatives des fonctions affines $f(x)=mx+p$.
2. Les droites parallèles à (Oy) ne sont pas des représentations de fonction.
3. Les droites parallèles à l'axe des abscisses ont une équation du type $y=k$ ($k\in\mathbb{R}$). Elle représentent les fonctions constantes. C'est un cas particulier de droite non parallèle à (Oy).

Exercice 1
Déterminer l'équation réduite puis tracer les droites suivantes :
d_1 d'équation $x-3y+6=0$.
d_2 d'équation $6x+4=0$.
d_3 d'équation $2y=-1$.

II Direction. Parallélisme de droites

Théorème

1. Deux droites parallèles à (Oy) sont ...
2. Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées. Alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement ...
   Autrement dit :
   Si $\mathscr{D}$ a pour équation $y=mx+p$ et $\mathscr{D}'$: $y=m'x+p'$ alors,
   $$\mathscr{D} \;//\; \mathscr{D}' \Leftrightarrow \ldots.$$

Remarque (Calcul du coefficient directeur à partir de deux points)
Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points d'abscisses différentes ($x_A\neq x_B$).

Le coefficient directeur de la droite (AB) est $m=\ldots$.

Propriété (Méthode pour déterminer l'équation d'une droite)
Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points tels que $x_A\neq x_B$ (de sorte que la droite (AB) ne soit pas parallèle à l'axe des ordonnées).
La droite (AB) a une équation de la forme $y=mx+p$.

1. Calcul du coefficient directeur m :
   $$m=\ldots$$
2. Calcul de l'ordonnée à l'origine p :
   On remplace x et y dans l'équation $y=mx+p$ avec les coordonnées d'un point de la droite (AB), donc A ou B.

Remarque
On peut aussi utiliser la méthode de l'exemple en introduction du chapitre.

Exercice 2
On donne $A(-2;3)$ et $B(4;0)$. Déterminer une équation de la droite (AB).

II.1 Vecteurs directeurs d'une droite

Un vecteur directeur d'une droite est un vecteur non nul qui a la même direction que la droite.

Remarque
Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.
Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, alors les vecteurs directeurs de $\mathscr{D}$ sont les vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{u}$.

Théorème

1. Les droites parallèles à l'axe des ordonnées sont dirigées par le vecteur $\vec{j}$ (dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$).
2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = mx + p$. ($\mathscr{D}$ non parallèle à (Oy)).
   Alors le vecteur $\vec{u}(1; m)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Remarque
Si (d) a son équation donnée sous la forme $ax + by + c = 0$, alors un vecteur directeur de (d) est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Théorème
Deux droites sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

Exercice 3
Notons $d_1 : y = 3x - 5$, $d_2 : x = 7$, $d_3 : y = -2$, $d_4 : 6x - 2y + 3 = 0$.
Donner un vecteur directeur pour chacune de ces droites.
Montrer de deux façons que $d_1 // d_4$.

III Systèmes d'équations de droites

Exemple :
$$\begin{cases} x - y = 2 & (d_1) \\ x + 2y = 3 & (d_2) \end{cases}$$
Résoudre un tel système consiste à trouver les réels x et y qui vérifient à la fois ces deux équations de droites, ce qui revient à déterminer les coordonnées des points $M(x; y)$ qui appartiennent aux deux droites à la fois.

Théorème (nombre de solutions possibles)
Un système formé de deux équations de droites peut avoir :
- 1 solution si les deux droites sont sécantes,
- aucune solution si les deux droites sont strictement parallèles (parallèles distinctes),
- une infinité de solutions si les deux droites sont confondues.

III.1 Méthodes de résolution

- méthode par substitution : on exprime une inconnue (par exemple x en fonction de y), et on la remplace dans l'autre équation.
- méthode par combinaison linéaire : on fait disparaître une inconnue en ajoutant ou soustrayant les deux égalités membre à membre.
  On peut multiplier au préalable une ou deux équations par des constantes non nulles pour faire en sorte qu'une inconnue se simplifie par la suite lorsqu'on fait la combinaison.

III.1.a Méthode par substitution

On exprime une inconnue (par exemple x en fonction de y), et on la remplace dans l'autre équation.

Exercice 4
Résoudre le système $\left\{\begin{array}{r} x-y=2 \\ x+2y=3 \end{array}\right.$

On exprime une inconnue (par exemple x en fonction de y), et on la remplace dans l'autre équation. Ici,

$$\left\{\begin{array}{r} x=y+2 \\ (y+2)+2y=3 \end{array}\right.$$

On trouve y dans la 2e équation, puis x.

$$\left\{\begin{array}{r} x=y+2 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{r} x=\dfrac{7}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Le système a une seule solution : le couple $\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

III.1.b Méthode par combinaison linéaire

Exercice 5
Résoudre le système $\left\{\begin{array}{r} 2x+3y=-1 \\ x-2y=-4 \end{array}\right.$

On va faire disparaître une inconnue d'une équation en soustrayant les deux équations.
Pour faire disparaître x, on multiplie par 2 la seconde équation de sorte que x ait le même coefficient dans les deux équations.

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x+3y=-1 & L1 \\ 2x-4y=-8 & L2 \end{array}\right.$$

On soustrait membre à membre $L1-L2$,

$$\left\{\begin{array}{rcll} 3y-(-4y) & = & -1-(-8) & L1-L2 \\ x & = & -4+2y & L2 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{rcl} 7y & = & 7 \\ x & = & -4+2y \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ x & = & -2 \end{array}\right.$$

Le couple solution est $(-2;1)$.