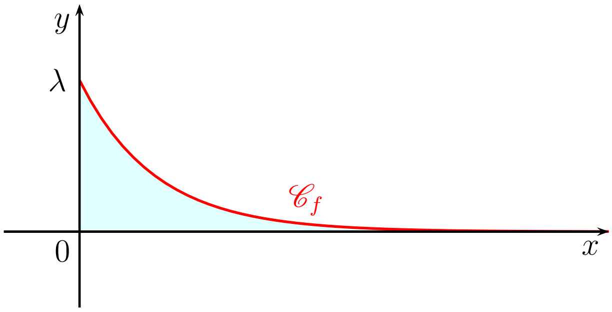
BTS. Loi exponentielle, loi de Poisson

Ces deux lois permettent de modéliser des phénomènes aléatoires où le futur est indépendant du passé.

I Loi exponentielle

Une loi exponentielle permet de modéliser la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, c'est-à-dire sans vieillissement ou usure (comme certaines ampoules).

Définition
Soit λ un réel strictement positif ($\lambda > 0$).
Une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.



Exercice 1
Soit X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

1. La fonction de densité est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) =$ ....
2. Une primitive de f est la fonction F définie pour tout $x \geqslant 0$ par $F(x) =$ ....
3. Calculer $P(X < 1)$
   ....
   ....
4. Calculer $P(X > 2)$
   ....
   ....
5. Calculer $P(1 < X < 2)$.
   ....
   ....

Propriété (sans mémoire, ou sans vieillissement)
Si T suit une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h,

$$P_{T \geqslant t}(T \geqslant t + h) = P(T \geqslant h).$$

Remarque
Cela traduit le fait que la loi exponentielle est sans mémoire : si X représente la durée de vie d'une machine, alors la probabilité que la machine dure h heures est la même que celle que la machine dure encore h heures après t heures de bon fonctionnement. Ainsi, l'âge de la machine ne change rien.

Théorème (définition)
Soit T une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
$E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$ $\quad V(T) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ $\quad \sigma(T) = \dfrac{1}{\lambda}$

Remarque
Lorsque T représente la durée de vie d'une machine, $E(T)$ représente la durée de vie moyenne, encore appelée la moyenne du temps de bon fonctionnement (MTBF).

II Loi de Poisson

La loi de Poisson intervient pour mesurer un nombre de réalisations observées pendant un intervalle de temps de longueur donnée, lorsque le temps d'attente entre deux réalisations est fourni par une loi exponentielle. Il s'agit donc d'une loi discrète.

Elle s'applique aux phénomènes rares qui se produisent de manière indépendante et aléatoire.
Par exemple :
- télécomunications (nombre d'appels téléphoniques dans un intervalle donné),
- contrôle de qualité statistique (nombre de pièces défectueuses dans un production en série, nombre d'accidents sur autoroute dans un intervalle de temps donné)
- description de certains phénéomènes liés à la désintégration radioactive, biologie (mutations), météorologie, finance (modéliser la probabilité d'un défaut de crédit)

Remarque (factorielle)
$k!$ se lit factorielle k, et $k! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times k$.
Cas particulier : $0! = 1$

Définition
Une variable X suit une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$) si pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la loi de probabilité est donnée par

$$P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$$

La loi est notée $\mathcal{P}(\lambda)$.

En particulier,
$P(X = 0) =$ .... $P(X = 1) =$ ....

Propriété (espérance, variance, écart-type d'une loi de Poisson)
Soit X une variable suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
$E(X) = \lambda$ $\quad V(X) = \lambda^2$ $\quad \sigma = \sqrt{\lambda}$.

Remarque (approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson)
La loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ peut être approchée par une loi de Poisson lorsque n est assez grand ($n \geqslant 30$), p voisin de 0 ($p \leqslant 0,1$), et le produit np pas trop grand ($np \leqslant 10$).
Dans ce cas, on l'approche ar la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.