1G - groupes 8 et 9 - Spécialité mathématiques
Correction du travail à distance n°4.

Exercice 1 (18 page 174)

1. $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x+x} = \mathrm{e}^{2x}$.
2. $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x-x} = \mathrm{e}^0 = 1$.
3. $\mathrm{e}^{1-x} \times \mathrm{e}^{-1-x} = \mathrm{e}^{1-x-1-x} = \mathrm{e}^{-2x}$.

Exercice 2 (19 page 174)

1. $(\mathrm{e}^x)^4 = \mathrm{e}^{4x}$.
2. $(\mathrm{e}^{2x})^{-1} = \mathrm{e}^{2x\times(-1)} = \mathrm{e}^{-2x}$.
3. $(\mathrm{e}^{-x+1})^2 = \mathrm{e}^{(-x+1)\times 2} = \mathrm{e}^{-2x+2}$.

Exercice 3 (19 page 174)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

1. $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{0,01}} = \mathrm{e}^{x-0,01}$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{0,01x}} = \mathrm{e}^{x-0,01x} = \mathrm{e}^{0,99x}$
3. $\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{x-1}} = \mathrm{e}^{2x+1-(x-1)} = \mathrm{e}^{x+2}$

Exercice 4 (34 page 175)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2\mathrm{e}^x$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 + 2\mathrm{e}^x$.
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$, on a $2\mathrm{e}^x > 0$ et $3 + 2\mathrm{e}^x > 3$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 + 2\mathrm{e}^x > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (43 page 175)
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2x} - 1 = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.
En développant,
$\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x+x} - \mathrm{e}^{x-x} = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{2x} - 1$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2x} - 1 = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.

Exercice 6 (44 page 175)
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^{-x} + 1) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.
En développant,
$(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^{-x} + 1) = \mathrm{e}^{x-x} + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 1 = \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 1 = 1 + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 1 = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^{-x} + 1) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 7 (45 page 175)

1. (a) $\mathrm{e}^{5x+2} \times \mathrm{e}^{x-5} = \mathrm{e}^{5x+2+x-5} = \mathrm{e}^{6x-3}$.
   (b) $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2+1}}{\mathrm{e}^{x+2}} = \mathrm{e}^{x^2+1-(x+2)} = \mathrm{e}^{x^2-x-1}$.
   (c) $(\mathrm{e}^{2x+7})^2 \times (\mathrm{e}^{1-x})^3 = \mathrm{e}^{2(2x+7)} \times \mathrm{e}^{3(1-x)} = \mathrm{e}^{4x+14+3-3x} = \mathrm{e}^{x+17}$
2. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1+\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}+1}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}+1} = \dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x}+1)} = \dfrac{\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^x} = \dfrac{1+\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}$.
   D'où le résultat.

Exercice 8 (62 page 176)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1-2x)$.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $A(x)$ a le même signe que $1-2x$.
   $1 - 2x = 0$ ssi $x = \dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$A(x) = (1-2x)\mathrm{e}^x$		$+$	0	$-$	

2. $B(x) = x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x - x^2)$.
   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$,
   $B(x)$ a le même signe que $x - x^2 = x(1-x)$.
   $x - x^2$ est une expression du second degré, qui a pour racines 0 et 1, et qui est négative (signe de "a") à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 9 (63 page 176)

1. $A(x) = 4\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = (4 - x^2)\mathrm{e}^{-x} = (2-x)(2+x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Une exponentielle est toujours strictement positive, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$.
   Donc $A(x)$ a le même signe que $4 - x^2 = (2-x)(2+x)$, qui est du second degré ayant pour racines 2 et -2 et qui est négatif (signe de "a") à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. $B(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x+2} = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^x(x - \mathrm{e}^2)$.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $B(x)$ a le même signe que $x - \mathrm{e}^2$.

x	$-\infty$		e^2		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 10 (11 page 181)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 3 + x\mathrm{e}^x$.

1. Dérivée.
   Par produit et somme de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0 + 1\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$.
2. Variations de g.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $g'(x)$ est du signe de $(x+1)$.

$x+1=0$ ssi $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$3-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	

$g(-1)=3+(-1)\mathrm{e}^{-1}=3-\mathrm{e}^{-1}$.

3. Extremum
   D'après la question précédente, g admet un minimum en -1, ce minimum est de $3-\mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 11 (90 page 178)
La fonction f est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{2\mathrm{e}^x}$.

1. Montrons que f' est du signe de $2x-x^2$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2\mathrm{e}^x\neq 0$ car $\mathrm{e}^x>0$.
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{2x\times 2\mathrm{e}^x-x^2\times 2\mathrm{e}^x}{(2\mathrm{e}^x)^2}=\dfrac{2\mathrm{e}^x(2x-x^2)}{2\mathrm{e}^x\times 2\mathrm{e}^x}=\dfrac{2x-x^2}{2\mathrm{e}^x}$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2\mathrm{e}^x>0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $2x-x^2$.
2. Variations de f.
   $2x-x^2=x(2-x)$ est une expression du second degré qui a pour racines 0 et 2.
   Elle est négative (signe de "a") à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$2x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	

$f(0)=\dfrac{0^2}{2\mathrm{e}^0}=\dfrac{0}{2}=0$.
$f(2)=\dfrac{2^2}{2\mathrm{e}^2}=\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}=2\mathrm{e}^{-2}$.

Exercice 12 (69 page 177)
1. $\mathrm{e}^{5x+1}=\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{2x}$ ssi $\mathrm{e}^{5x+1}=\mathrm{e}^{2x+1}$ ssi $5x+1=2x+1$ ssi $x=0$.
   L'équation admet une solution qui est 0.
2. $(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2)(\mathrm{e}^{-x}+5)=0$
   ssi $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2=0$ ou $\mathrm{e}^{-x}+5=0$.
   Or, $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2=0$ ssi $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^2$ ssi $x=2$.
   Et comme une exponentielle est toujours strictement positive, $\mathrm{e}^{-x}>0$ sur $\mathbb{R}$, et donc l'équation $\mathrm{e}^{-x}+5=0$ n'a pas de solution.
   L'équation $(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2)(\mathrm{e}^{-x}+5)=0$ admet une seule solution qui est 2.

Exercice 13 (70 page 177)
1. $3\mathrm{e}^{3x-42}+1=4$ ssi $3\mathrm{e}^{3x-42}=3$ ssi $\mathrm{e}^{3x-42}=1$.
   Or, on sait que $\mathrm{e}^0=1$.
   L'équation équivaut à $\mathrm{e}^{3x-42}=\mathrm{e}^0$ soit $3x-42=0$, ou encore $x=14$.
   L'équation a une seule solution qui est 14.

2. $e^{5x} = \dfrac{e^{-x}}{e}$ ssi $e^{5x} = e^{-x-1}$ ssi $5x = -x - 1$ ssi $x = -\dfrac{1}{6}$.
   L'équation a une seule solution qui est $-\dfrac{1}{6}$.

Exercice 14 (72 page177)

1. $X^2 + 6X - 7 = 0$.
   C'est une équation du second degré.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 36 + 28 = 64 > 0$.
   $X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6 - 8}{2} = -7$.
   $X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6 + 8}{2} = 1$.
   Les solutions sont -7 et 1.
2. Équation $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$.
   On note que $e^{2x} = (e^x)^2$.
   Donc, en posant $X = e^x$, on se ramène à l'équation $X^2 + 6X - 7 = 0$ de la question 1.
   Il vient donc $X = -7$ ou $X = 1$.
   Ainsi,$e^x = -7$ ou $e^x = 1$.
   L'équation $e^x = -7$ n'a pas de solution réelle car $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.
   L'équation $e^x = 1$ équivaut à $e^x = e^0$, et donc à $x = 0$.
   L'équation $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$ a une seule solution qui est 0.

Exercice 15 (78 page 177)

1. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-2e^{2x} + e^x + 1 = (2e^x + 1)(1 - e^x)$.
   En développant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $(2e^x + 1)(1 - e^x) = 2e^x - 2e^{2x} + 1 - e^x = -2e^{2x} + e^x + 1$.
2. Signe de $-2e^{2x} + e^x + 1$.
   On utilise la forme factorisée $-2e^{2x} + e^x + 1 = (2e^x + 1)(1 - e^x)$.
   Comme une exponentielle est toujours strictement positive, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x > 0$, et $2e^x + 1 > 0$.
   $1 - e^x > 0$ ssi $e^x < 1$ ssi $e^x < e^0$ ssi $x < 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2e^x + 1$		$+$		$+$	
$1 - e^x$		$+$	0	$-$	
$(2e^x + 1)(1 - e^x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 16 (98 page 179)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (1+2x)\mathrm{e}^{3x}$.

1. Variations de f.
   Par produit de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{3x} + (1+2x) \times 3\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}[2 + 3(1+2x)] = (6x+5)\mathrm{e}^{3x}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{3x} > 0$.
   Donc $f'(x)$ le même signe que $6x+5$.
   $6x + 5 = 0$ ssi $x = -\frac{5}{6}$.
   $f(-\frac{5}{6}) = \left(1 - 2 \times \frac{5}{6}\right)\mathrm{e}^{-\frac{15}{6}} = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}} \approx -0,05$.

x	$-\infty$ $-5/6$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$\searrow$ $-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}$ $\nearrow$

2. Équation de la tangente au point d'abscisse 0.
   Une équation de cette tangente T est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
   $f(0) = (1 + 2 \times 0)\mathrm{e}^{3\times 0} = 1 \times 1 = 1$.
   $f'(0) = (6 \times 0 + 5) \times \mathrm{e}^{3\times 0} = 5 \times 1 = 5$.
   $y = 5(x-0) + 1 = 5x + 1$.
   La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 5x + 1$.
3. Position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
   Cela revient à étudier le signe de $f(x) - 0 = f(x)$.
   $f(x) = (1+2x)\mathrm{e}^{3x}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{3x} > 0$.
   Donc $f(x)$ le même signe que $1 + 2x$.
   $1 + 2x = 0$ ssi $x = -\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$ $-1/2$ $+\infty$
$f(x)$	$-$ 0 $+$

   $\mathscr{C}$ est en-dessous de l'axe des abscisses sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$.
   $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Exercice 17 (103 page 179)
Notons g la fonction exponentielle, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, T la tangente au point d'abscisse 1.

1. Il semble que $\mathscr{C}$ soit toujours au-dessus de la tangente T.
2. $g(x) = \mathrm{e}^x$.
   Équation de la tangente au point d'abscisse 1.
   $y = g'(1)(x-1) + g(1)$.
   $g(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
   Comme $g'(x) = \mathrm{e}^x$, on a $g'(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
   D'où $y = \mathrm{e}(x-1) + \mathrm{e} = \mathrm{e}x$.
   T a pour équation $y = \mathrm{e}x$.

3. On pose $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}x$.
   (a) $f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}$.
   $f'(x) > 0$ ssi $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^1$ ssi $x > 1$.
   (b) Signe de $f'(x)$ et variations de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

   $f(1) = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e} \times 1 = 0$.
4. Conclusion.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geqslant 0$ (puisque le minimum de la fonction f est 0).
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}x$.
   $\mathscr{C}$ est toujours au-dessus de T.

Exercice 18 (52 page 176)
Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{1+2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{1+x}}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}$.
Comme une exponentielle est toujours strictement positive, on a,
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \mathrm{e}^{2x} > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x > 0$.
L'égalité étudiée est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
D'une part, $\mathrm{e}^{1+2x} \times (\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{1+2x-x} + \mathrm{e}^{1+2x+x} = \mathrm{e}^{1+x} + \mathrm{e}^{1+3x}$.
D'autre part, $(1 + \mathrm{e}^{2x}) \times \mathrm{e}^{1+x} = \mathrm{e}^{1+x} + \mathrm{e}^{1+x+2x} = \mathrm{e}^{1+x} + \mathrm{e}^{1+3x}$.
Comme les produits en croix sont égaux, les fractions sont égales.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{1+2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{1+x}}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}$.

Exercice 19 (65 page 176)
1. Signe de $A(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^x + 1 > 0$, donc $A(x)$ a le même signe que x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

2. Signe de $B(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x+1}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^x(x - \mathrm{e})$.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $B(x)$ a le même signe que $x - \mathrm{e}$ (fonction affine, $a = 1 > 0$).

x	$-\infty$		e		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 20 (73 page 177)
1. Montrons que $\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$ équivaut à $(\mathrm{e}^x)^2 + \mathrm{e}^x - 2 = 0$.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$ équivaut à $(\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} + 1)\mathrm{e}^x = 0$, soit $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^x = 0$, c'est-à-dire $(\mathrm{e}^x)^2 + \mathrm{e}^x - 2 = 0$.
2. Résolution de $\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$.
   On résout l'équation $(\mathrm{e}^x)^2 + \mathrm{e}^x - 2 = 0$ qui lui est équivalente.
   On pose $X = \mathrm{e}^x$, l'équation devient du second degré, $X^2 + X - 2 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$.

$X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 - 3}{2} = -2$.

$X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 + 3}{2} = 1$.

Comme on a posé $X = \mathrm{e}^x$, il vient

$\mathrm{e}^x = -2$ ou $\mathrm{e}^x = 1$.

L'équation $\mathrm{e}^x = -2$ n'a pas de solution réelle car $\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

L'équation $\mathrm{e}^x = 1$ équivaut à $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0$, et donc à $x = 0$.

L'équation $\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$ a une seule solution qui est 0.

Exercice 21 (74 page 177)

1. $1 \leqslant e^{3x}$ ssi $e^{3x} \geqslant e^0$ ssi $3x \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 0$.
   $S = [0; +\infty[$.
2. $e^{-x^2} - e \times e^{7x-9} \leqslant 0$
   ssi $e^{-x^2} - e^{7x-9+1} \leqslant 0$
   ssi $e^{-x^2} \leqslant e^{7x-8} \leqslant 0$
   ssi $-x^2 \leqslant 7x - 8$.
   ssi $x^2 + 7x - 8 \geqslant 0$, inéquation du second degré.
   Comme 1 est racine évidente de l'équation, on trouve la seconde racine avec la propriété qui dit que le produit des racines fait $\dfrac{c}{a}$ (on peut aussi bien sûr calculer Δ etc.)
   Les racines sont donc 1 et -8, et le trinôme est positif, (signe de a, ici $a = 1 > 0$) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-8		1		$+\infty$
x^2+7x-8		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty; -8] \cup [1; +\infty[$.

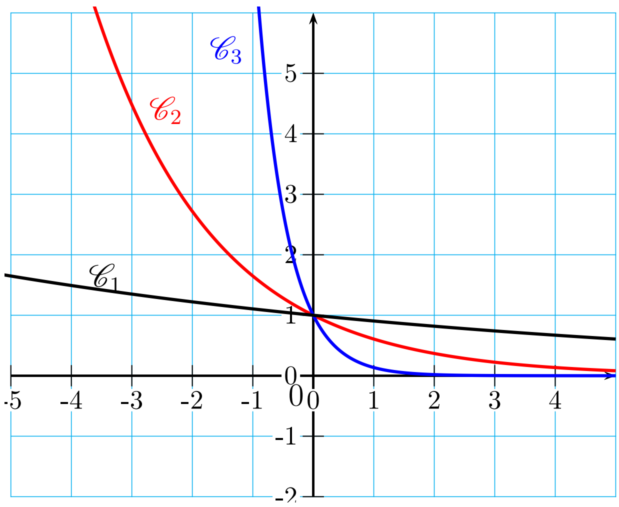
Exercice 22 (83 page 178)

Soient k et m des réels tels que $0 < k < m$.

1. Étudier le signe de $e^{-kx} - e^{-mx}$.
   $e^{-kx} - e^{-mx} > 0$ ssi $e^{-kx} > e^{-mx}$ ssi $-kx > -mx$ ssi $(m-k)x > 0$.
   Or, on suppose que $0 < k < m$, et donc on a $m - k > 0$.
   Ainsi, $(m-k)x > 0$ ssi $x > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{-kx} - e^{-mx}$		$-$	0	$+$	

2. $f(x) = e^{-0,5x}$, $g(x) = e^{-0,1x}$ et $h(x) = e^{-2x}$.
   La question 1 montre que si $0 < k < m$, alors la courbe de $x \mapsto e^{-kx}$ est au-dessus de celle de $x \mapsto e^{-mx}$ sur $]0; +\infty[$, et en-dessous sur $]-\infty; 0[$.
   Ainsi, puisque $0 < 0,1 < 0,5 < 2$, à l'aide de ce résultat, on a sur $[0; +\infty[$, $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.
   Donc la courbe de f est $\mathscr{C}_2$, celle de g est $\mathscr{C}_1$ et celle de h est $\mathscr{C}_3$.



Exercice 23 (93 page 178)
Sur $[2;10]$, on donne $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-3}$.

1. Calculons $f'(x)$ et montrons que $f'(x)$ est du signe de x^2-2x-3.
   Tout d'abrd, $x^2-3=0$ ssi $x=\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$.
   Aucun de ces nombres n'appartient à l'intervalle $[2;10]$, donc x^2-3 ne s'annule pas sur cet intervalle.
   Par quotient de fonctions dérivables, f est dérivable sur $[2;10]$.
   On rappelle la dérivée d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.
   Pour tout $x \in [2;10]$, $f'(x) = \dfrac{e^x(x^2-3) - e^x \times 2x}{(x^2-3)^2} = \dfrac{e^x(x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2}$.
   Or, $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in [2;10]$, $(x^2-3)^2 > 0$.
   Donc $f'(x)$ a le même signe que x^2-2x-3.
2. Tableau de variation de f.
   On étudie le signe de $f'(x)$, ce qui revient au signe du trinôme x^2-2x-3.
   $\Delta = b^2-4ac = 4+12 = 16 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-4}{2} = -1$.
   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+4}{2} = 3$.
   Le trinôme prend le signe de a (ici $a=1>0$) à l'extérieur des racines, et comme on se limite à l'intervalle d'étude [2 ;10], on obtient le tableau suivant :

x	2		3		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e^2	$\searrow$	$\dfrac{e^3}{6}$	$\nearrow$	$\dfrac{e^{10}}{97}$

$f(2) = \dfrac{e^2}{2^2-3} = e^2 \approx 7,4$.
$f(3) = \dfrac{e^3}{6} \approx 3,3$.
$f(10) = \dfrac{e^{10}}{97} \approx 227,1$.

Exercice 24 (104 page 179)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = e^{n+1}$.
Montrons que la suite (u_n) est géométrique, et précisons la raison.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{n+1+1} = e^{n+1} \times e = e \times u_n$.
Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = e \approx 2,718$.
Remarque :
Comme le premier terme est positif et $q > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 25 (105 p 179)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{e^{5n}}{5}$.
Montrons que la suite (u_n) est géométrique, et précisons la raison.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{5(n+1)}}{5} = \dfrac{e^{5n+5}}{5} = \dfrac{e^{5n} \times e^5}{5} = e^5 \times \dfrac{e^{5n}}{5} = e^5 \times u_n$.
Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = e^5 \approx 148,4$.

Exercice 26 (sujet B page 187)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (4x+1)\mathrm{e}^{-x}$. Calculons $f'(x)$.
   On rappelle que, pour tous réels a et b, la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ est $x \mapsto a\mathrm{e}^{ax+b}$.
   Et la dérivée d'un produit de deux fonctions est donnée par $(uv)' = u'v + uv'$.
   Ici, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4\mathrm{e}^{-x} + (4x+1) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}[4-(4x+1)] = (-4x+3)\mathrm{e}^{-x}$.
   Réponse b.
2. Résolvons l'inéquation $\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-3+0,1x} > 0$.
   Cela revient à $\mathrm{e}^1 > \mathrm{e}^{-3+0,1x}$ ssi $1 > -3 + 0,1x$ ssi $0,1x < 4$ ssi $x < 40$.
   L'ensemble solution est $]-\infty; 40[$.
   Réponse b.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x+3} - 3\mathrm{e}^x$ a le même signe que ...
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x+3} - 3\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^3 - 3\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^3 - 3)$.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x+3} - 3\mathrm{e}^x$ a le même signe que $\mathrm{e}^3 - 3$ (positif).
   Réponse a.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2x+3} \times \mathrm{e}^x$ est égal à ....
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2x+3} \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x+3+x} = \mathrm{e}^{3x+3} = \mathrm{e}^{3(x+1)} = (\mathrm{e}^{x+1})^3$.
   Réponse a.

Exercice 27 (sujet C page 187)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x$.

1. Dérivée.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 2 = 2(\mathrm{e}^{2x} - 1)$.
2. Signe de $f'(x)$.
   Comme $2 > 0$, $f'(x) = 2(\mathrm{e}^{2x} - 1)$ a le même signe que $\mathrm{e}^{2x} - 1$.
   $\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0$ ssi $\mathrm{e}^{2x} > \mathrm{e}^0$ ssi $2x > 0$ ssi $x > 0$.
   $f'(x) = 0$ ssi $x = 0$. Donc $f'(x) > 0$ ssi $x > 0$, et $f'(x) < 0$ ssi $x < 0$.
3. Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

   $f(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1$.

4. (a) Montrer que f admet un minimum, préciser en quelle valeur il est atteint.
   D'après le tableau de variation de f, f admet un minimum en 0, ce minimum est 1.
   (b) Signe de f.
   Comme le minimum de f est 1>0, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$.
5. Soit T la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
   (a) Équation de T.
   $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(\mathrm{e}^2 - 1)(x-1) + \mathrm{e}^2 - 2$
   $y = 2(\mathrm{e}^2 - 1)x + \mathrm{e}^2 - 2 - 2\mathrm{e}^2 + 2 = 2(\mathrm{e}^2 - 1)x - \mathrm{e}^2$.
   T a pour équation $y = 2(\mathrm{e} - 1)x - \mathrm{e}^2$.
   (b) Montrons que T passe par le point $A(0; -\mathrm{e}^2)$.
   En remplaçant x par 0 dans l'équation de T, on a $y = 0 - \mathrm{e}^2 = -\mathrm{e}^2$.
   Donc T passe par le point $A(0; -\mathrm{e}^2)$.