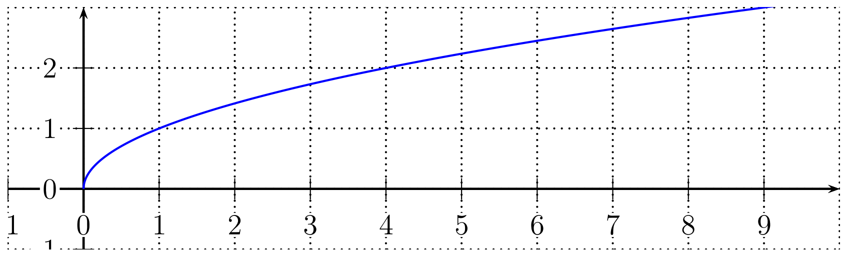
Chapitre 14 : Fonctions de référence
Deuxième partie

I La fonction racine carrée

Définition
La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.



Propriété
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Propriété (rappels)
Pour tous nombres a et b positifs ou nuls,

1. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
2. si de plus $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

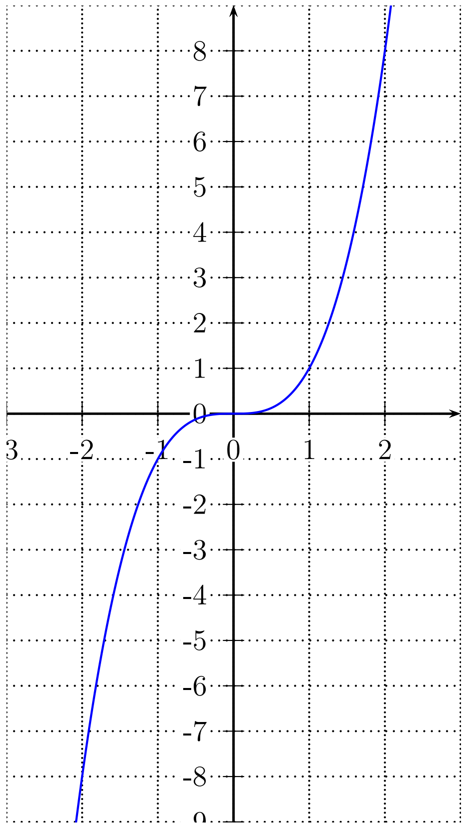
Remarque
Attention, de façon générale, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Par exemple, prenons $a = 9$ et $b = 16$.
$\sqrt{a+b} = \sqrt{25} = 5$, tandis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 3 + 4 = 7$.

II La fonction cube

Définition
La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Propriété (admise)
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

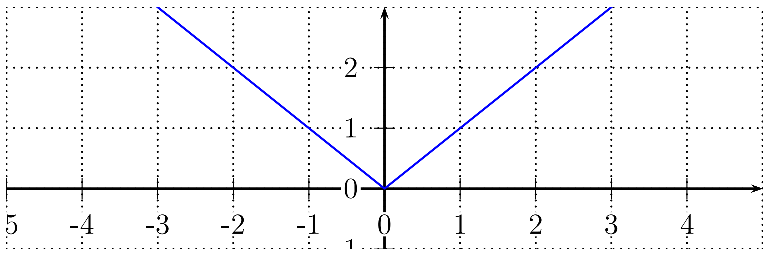
Remarque
La courbe est symétrique par rapport au point O : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ (la fonction cube est impaire).



III La fonction valeur absolue

Définition
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur absolue de x est le réel positif noté $|x|$ défini par :
- si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$
- si $x < 0$ alors $|x| = -x$.

Représentation graphique de la fonction valeur absolue



Propriété ("distance" entre deux réels)
Pour tous réels a et b, la distance entre a et b (longueur AB où A et B sont les images des réels a et b sur la droite graduée) est $|a - b|$.

Remarque
1. Soient $a \in \mathbb{R}$, et $r > 0$.
   L'ensemble des nombres réels x tels que $|x - a| \leqslant r$ est l'intervalle $[a - r; a + r]$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

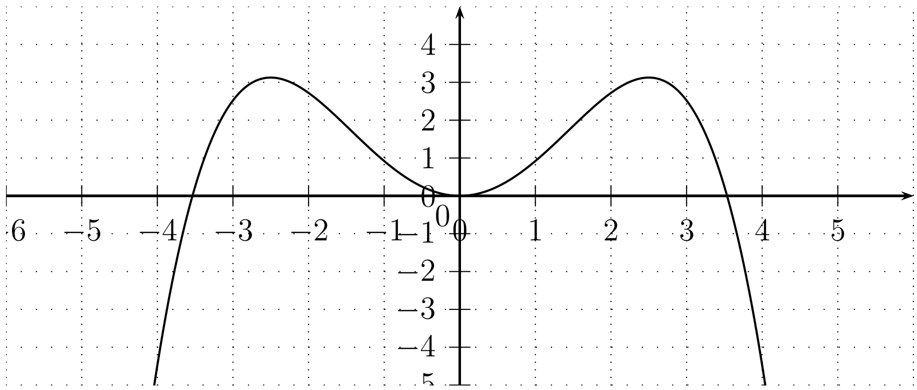
IV Fonctions paires et fonctions impaires

IV.1 Fonctions paires

Définition
Soit f une fonction définie sur un domaine D symétrique par rapport 0 (si $x \in D$, alors $-x \in D$).
On dit que f est paire lorsque pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.

Conséquence graphique
On se place dans un repère orthogonal.
Lorsque f est paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

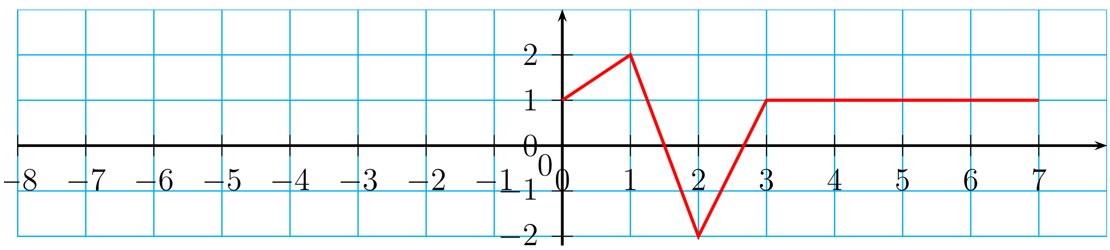
Illustration :



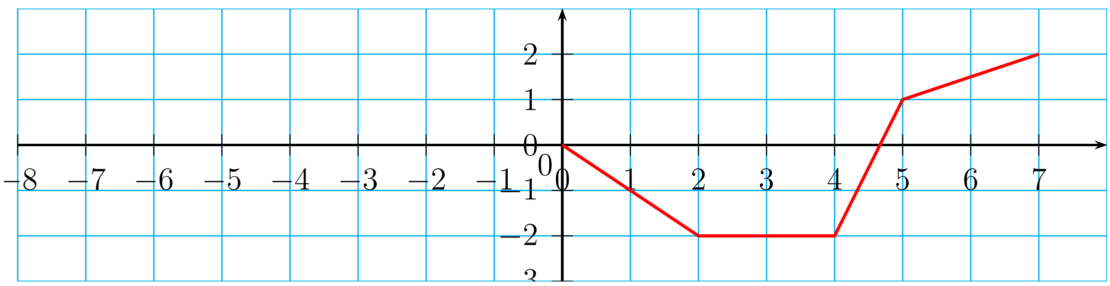
Exemple :
La fonction carré est paire.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^2 = x^2$.

Exercice 1
Compléter les courbes de fonctions pour qu'elles représentent des fonctions paires sur $[-7; 7]$.

1. Fonction f.



2. Fonction g



Exercice 2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5}x^6 - x^2$. Montrer que f est paire.

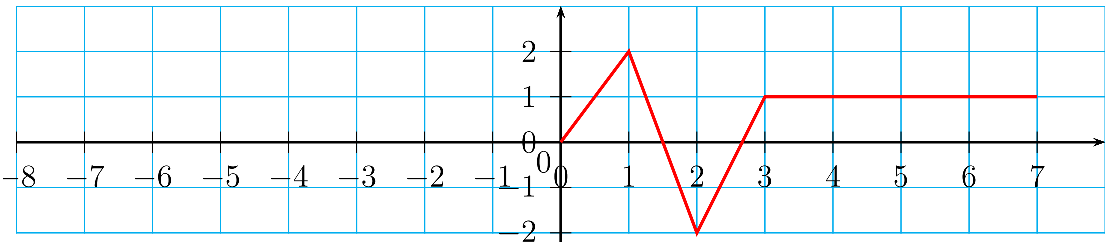
IV.2 Fonctions impaires

Définition
Soit f une fonction définie sur un domaine D symétrique par rapport 0 (si $x \in D$, alors $-x \in D$).
On dit que f est impaire lorsque pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

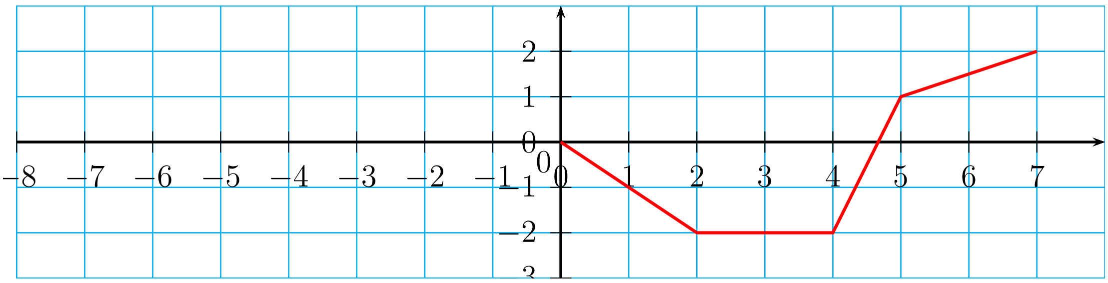
Conséquence graphique
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère (le point O).
Exemple :
La fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est impaire.
En effet, pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$.

Exercice 3
Compléter les courbes de fonctions pour qu'elles représentent des fonctions impaires sur $[-7; 7]$.

1. Fonction f.



2. Fonction g



Remarque
1. Les fonctions $x \mapsto x^n$ avec n entier pair sont des fonctions paires.
2. Les fonctions $x \mapsto x^n$ avec n impair sont des fonctions impaires.

Remarque
1. Il existe des fonctions ni paire ni impaire (fonction racine carrée, voir aussi l'exercice suivant).
2. Il n'y a qu'une seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire, c'est la fonction nulle (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$).

Exercice 4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 5x$.
1. Calculer $f(-2)$, puis $f(2)$.

2. Que peut-on en déduire sur la parité de f ?

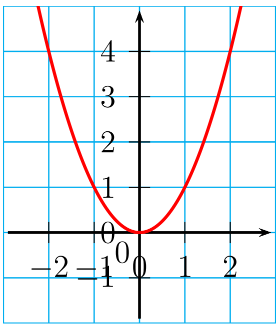
Exercice 5 (recherche des fonctions affines paires ou impaires)
Soient a et b deux réels, et soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

1. Exprimer $f(1)$ et $f(-1)$.
2. (a) Montrer que si f est paire, alors $a = 0$.
   (b) Étudier la réciproque de l'implication précédente, et conclure.
3. (a) Montrer que si f est impaire, alors $b = 0$.
   (b) Étudier la réciproque de l'implication précédente, et conclure.

Quelques exemples avec des fonctions de référence

fonction carré

$f(x) = x^2$

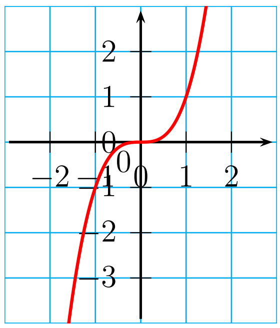


$D_f = \mathbb{R}$

f est paire

fonction cube

$f(x) = x^3$

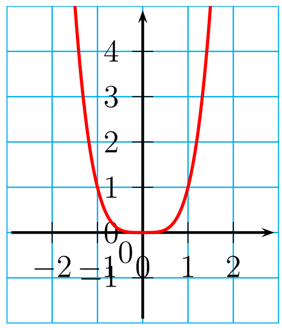


$D_f = \mathbb{R}$

f est impaire

puissance quatrième

$f(x) = x^4$

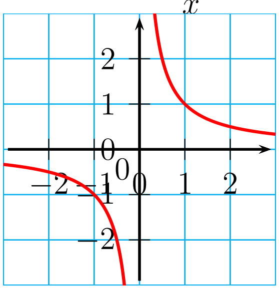


$D_f = \mathbb{R}$

f est paire

fonction inverse

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

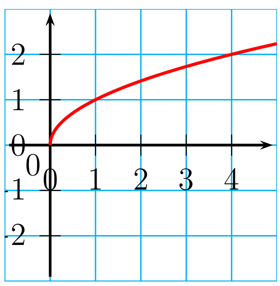


$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

f est impaire

fonction racine carrée

$f(x) = \sqrt{x}$

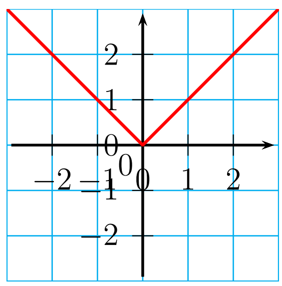


$D_f = [0; +\infty[$

ni paire ni impaire

fonction valeur absolue

$f(x) = |x|$

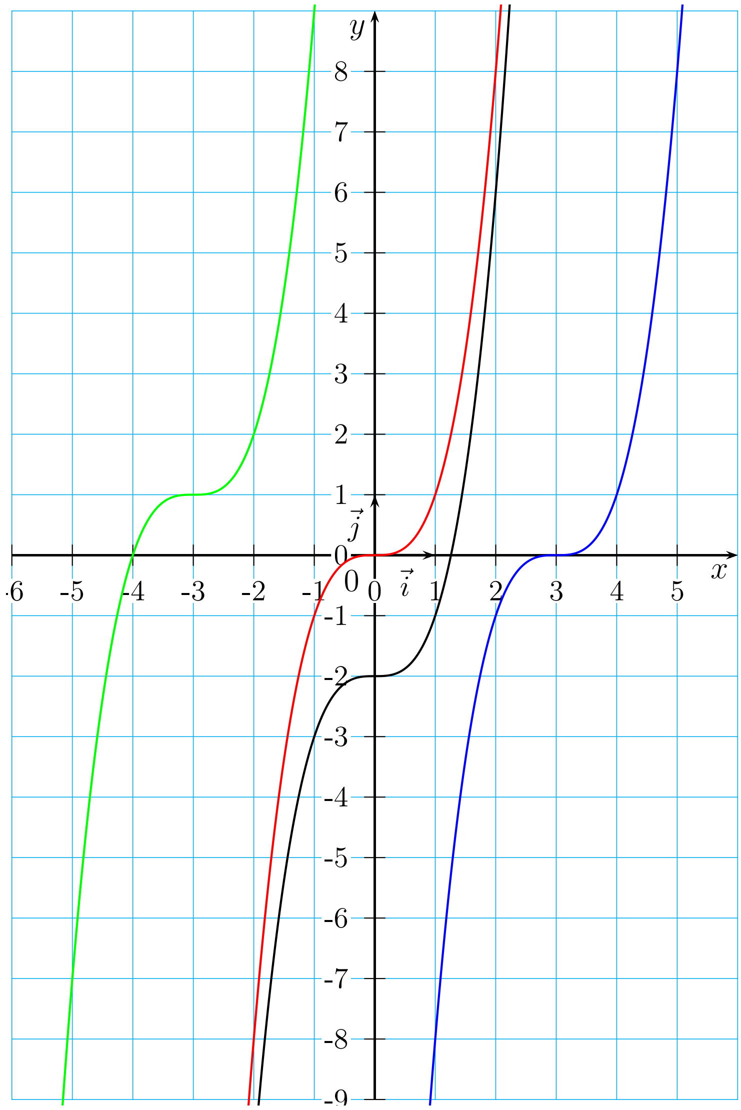


$D_f = \mathbb{R}$

f est paire

V Complément : fonctions associées

Exemple :
$f(x) = x^3$,
$g(x) = x^3 - 2$,
$h(x) = (x-3)^3$,
$i(x) = (x+3)^3 + 1$.



Théorème
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Si g est définie par $g(x) = f(x-a)$, alors $\mathcal{C}_g$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par une translation de vecteur $a\vec{i}$.
2. Si h est définie par $h(x) = f(x) + b$, alors $\mathcal{C}_h$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par une translation de vecteur $b\vec{j}$.
3. Si u est définie par $u(x) = f(x-a) + b$, alors $\mathcal{C}_u$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par une translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$.
4. Si v est définie par $v(x) = -f(x)$, alors $\mathcal{C}_v$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par symétrie d'axe $(O;\vec{i})$.