Chapitre 7 : Continuité.
Théorème des valeurs intermédiaires

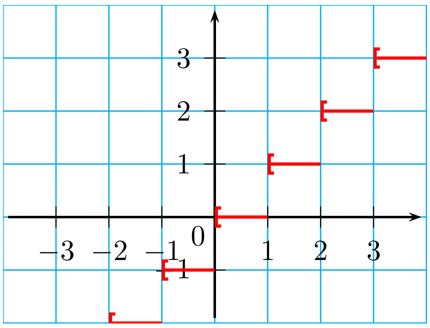
I Fonction continue

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. Soit $a \in I$. On dit que f est continue en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel de I.

Remarque
On peut tracer la courbe d'une fonction continue sans lever le crayon, alors que c'est impossible avec une fonction discontinue.

Exemple :
La partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On la note $E(x)$.
Par exemple,
$E(27,3) =$ $\qquad$ $E(\pi) =$ $\qquad$ $E(6) =$ $\qquad$ $E(-5,1) =$
La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (elle est discontinue en tout nombre entier a).

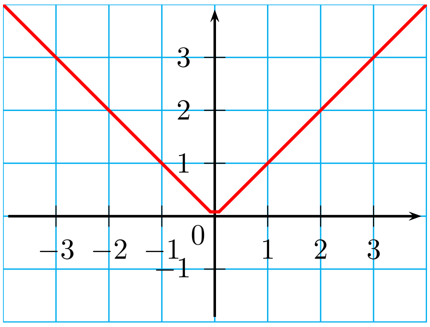


Exercice 1
Montrer que la fonction partie entière n'est pas continue en 2.
$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} E(x) =$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} E(x) =$
Donc ....
....

Propriété (admise)
Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Corollaire
Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions fractions rationnelles (quotient de polynômes) sont continues sur leur ensemble de définition.

Remarque
La réciproque de la propriété précédente est fausse :
il existe des fonctions qui sont continues en a et qui ne sont pas dérivables en a.
Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ (donc en 0), mais elle n'est pas dérivable en 0.



Exercice 2
En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

La fonction valeur absolue est définie par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Propriété (opérations sur les fonctions continues)
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle I.

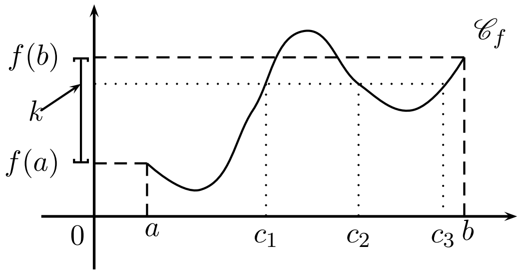
1. Les fonctions $(u+v)$, $(u \times v)$ et u^n $(n \geqslant 1)$ sont continues sur I.
2. Les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont continues sur les intervalles où elles sont définies (lorsque $v(x) \neq 0$).

Propriété (composée de fonctions continues)
Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions continues.
Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

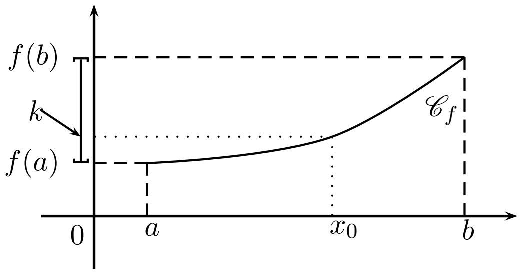
Exemple :
Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = |6x+1|$.
En posant $g(x) = |x|$ et $f(x) = 6x+1$, on a $u = g \circ f$.
Comme f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, u est continue sur $\mathbb{R}$.

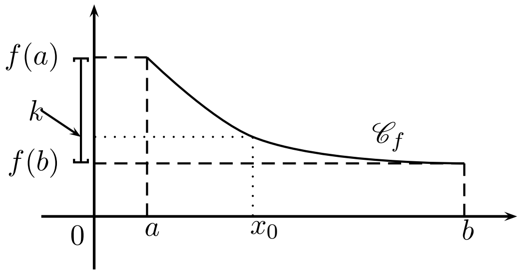
II Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (des valeurs intermédiaires : TVI)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$.



Corollaire
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$.
Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution x_0 dans $[a;b]$.





Remarque

1. En particulier, si f et dérivable et $f' > 0$ sur $[a;b]$, alors f est continue et strictement croissante sur $[a,b]$ et les hypothèses du corollaire sont vérifiées.
   De même les hypothèses du corollaire sont vérifiées si $f' < 0$ sur $[a;b]$.
2. On utilise souvent ce corollaire avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires.
   Alors, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[a;b]$.

Exemple détaillé :
On cherche à étudier l'équation $x^3 + 3x - 7 = 0$ sur $[1;2]$.
Notons $f(x) = x^3 + 3x - 7$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$.
   On en déduit que f est strictement croissante sur $[1;2]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$.
   On remarque que $f(1) = -3$ et $f(2) = 7$.
   D'après le théorème précédent, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[1; 2]$.
3. Utiliser le tableur de la calculatrice pour déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
   Après quelques manipulations, on obtient sur la calculatrice le tableau de valeurs suivant :

x	$f(x)$
1.405	-0.0115
1.406	-0.0026
1.407	0.00637
1.408	0.01531

   On en déduit que $1.406 < \alpha < 1.407$.

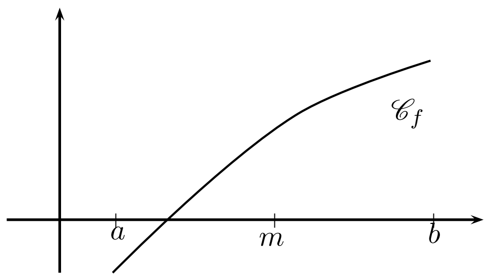
III Algorithme de dichotomie

On se place dans le cas où l'on peut appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : la fonction f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires (ce qui s'écrit $f(a) \times f(b) < 0$).
Alors, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[a;b]$.

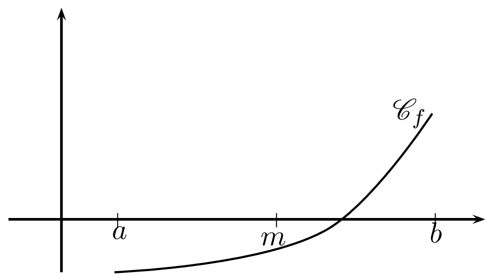
Pour approcher cette solution α, l'algorithme de dichotomie consiste à découper l'intervalle $[a;b]$ en 2 autant de fois qu'il le faut pour atteindre la précision souhaitée.

À chaque étape, on calcule le nombre $m = \dfrac{a+b}{2}$, centre de l'intervalle $[a;b]$.
Si $f(a) \times f(m) \leqslant 0$, alors $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires.
On en déduit donc que $\alpha \in [a;m]$.
On recommence alors le procédé avec l'intervalle $[a;m]$.
Sinon, $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe, donc $\alpha \in [m;b]$.
On recommence avec l'intervalle $[m;b]$.

Illustration avec f strictement croissante sur $[a;b]$:



$f(a) \times f(m) \leqslant 0$.
Alors $\alpha \in [a;m]$



$f(a) \times f(m) > 0$.
Alors $\alpha \in [m;b]$.

Algorithme renvoyant les bornes a et b d'un intervalle $[a;b]$ ayant une amplitude inférieure à e et contenant α.

Saisir a, b, e
Tant que $b - a \geqslant e$
    m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
    Si $f(a) \times f(m) \leqslant 0$
        Alors b prend la valeur m
        Sinon a prend la valeur m
    Fin Si
Fin Tant que
Afficher a et b.

Algorithme TI (en entrant la fonction f dans Y_1).

: Prompt A,B,E
: While B-A$\geqslant$ E
: (A+B)/2$\rightarrow$ M
: If Y_1(A)*Y_1(M)$\leqslant$0
: Then
: M $\rightarrow$ B
: Else
: M $\rightarrow$ A
: End
: End
: Disp A,B

Attention, on trouve Y_1 dans $\boxed{\text{var}}$, puis $\boxed{\text{VAR-Y=}}$.
Ne pas taper $Y1$.

Algorithme Casio (en entrant la fonction f dans Y_1).

```
? → A
? → B
? → E
While B-A⩾ E
(A+B)/2 → M
A → X
Y1 → F
M → X
Y1 → G
If F×G⩽0
Then M → B
Else M → A
IfEnd
WhileEnd
A ◢
B ◢
```

Remarque
Pour approcher la solution de l'équation $f(x) = k$, on utilise la fonction g définie par $g(x) = f(x) - k$ à la place de la fonction f.
En effet, $f(x) = k$ équivaut à $g(x) = 0$.

Exemple :
Exercice 120 page 62.
On montre que l'équation $x^3 - 2x^2 + x = 1$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$.
On rentre $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ dans Y_1.
Pour une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut, on cherche un encadrement d'amplitude inférieure à 0,01.
On entre donc dans l'algorithme $a = 1$, $b = 2$, et $e = 0,01$.
Il renvoie $a = 1,75$, et $b = 1,7578125$.
Donc $1,75 < \alpha < 1,76$.
Par défaut à 0,01 près, $\alpha \approx 1,75$.
Attention, il faut parfois entrer une valeur de e inférieure à l'amplitude de l'encadrement souhaité :
Pour un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}, si l'on lance l'algorithme avec $e = 0,001$, on obtient :
$a = 1,75390625$ et $b = 1,754882813$.
Cela ne permet pas de conclure.
Avec $e = 0,0001$, $a = 1,754875183$ et $b = 1,754882813$.
Donc $1,754 < \alpha < 1,755$.