Chapitre 10 : La fonction exponentielle

I Définition et propriétés

Théorème (et définition)
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée la fonction exponentielle, et on la note exp.

Propriété (rappel sur la dérivation, pour la démonstration)
Soient a et b deux réels, et g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction f définie par $f(x) = g(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = a \times g'(ax+b).$$

Démonstration (unicité)
On admet qu'il existe une telle fonction. On montre l'unicité.

1. On montre qu'une telle fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = f(x) \times f(-x)$.
   Par produit (et composée), Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Si on pose $v(x) = f(-x)$, la dérivée de la fonction v est $v'(x) = -f'(-x)$.
   D'après la formule de dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\Phi'(x) = f'(x) \times f(-x) - f(x)f'(-x)$$
   Or, $f' = f$, ce qui donne
   $$\begin{aligned}\Phi'(x) &= f(x) \times f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0\end{aligned}$$
   Comme $\Phi' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, la fonction Φ est constante.
   Or, $f(0) = 1$, donc $\Phi(0) = f(0)^2 = 1$.
   Φ est la fonction constante égale à 1.
   Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) = 1$.
   La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. Démonstration de l'unicité de la fonction f.
   Considérons une autre fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
   Alors g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (d'après 1.).
   Par quotient de fonctions dérivables, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2} \\ &= \frac{f(x)g(x) - g(x)f(x)}{[g(x)]^2} \\ &= 0\end{aligned}$$
   On en déduit que la fonction $\dfrac{f}{g}$ est constante sur $\mathbb{R}$.
   Or, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$.
   Donc $\dfrac{f}{g}$ est la fonction constante égale à 1.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.
   Conclusion :
   il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. □

Propriété

1. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
3. $\exp(0) = 1$

Exercice 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \exp(x)$.
Calculer $f'(x)$.

Propriété (relation fonctionnelle)
Pour tous réels a et b, $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Démonstration
Soient a et b deux réels.
Posons $g(x) = f(a + b - x) \times f(x)$ où f est la fonction exponentielle.
En posant $u(x) = f(a + b - x)$, d'après le rappel initial,
on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = (-1) \times f(a + b - x) = -f(a + b - x)$.
Par produit de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$(u \times v)' = u'v + uv'$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, (et comme $f' = f$),

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & -f'(a+b-x)f(x) + f(a+b-x)f'(x) \\ & = & -f(a+b-x)f(x) + f(a+b-x)f(x) \\ & = & 0 \end{array}$$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$.
$g(0) = f(a + b)f(0) = f(a + b)$.
$g(b) = f(a + b - b)f(b) = f(a) \times f(b)$.
Comme g est constante, $g(0) = g(b)$, soit $f(a + b) = f(a) \times f(b)$.
Conclusion : pour tous réels a et b, $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$. □

Exemple :
$\exp(x) \times \exp(3) = \exp(x + 3)$
$\exp(2a-11) = \exp(2a)\times\exp(-11) = \exp(a)\times\exp(a)\times\exp(-11) = (\exp(a))^2\times\exp(-11)$.

Propriété
La fonction exponentielle est strictement positive : pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\exp(a) > 0$.

Démonstration
Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$.
Avec la relation fonctionnelle, on a

$$\begin{array}{rcl} \exp(a) & = & \exp\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) \\ & = & \exp\left(\frac{a}{2}\right) \times \exp\left(\frac{a}{2}\right) \\ & = & \left[\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2 \geqslant 0. \end{array}$$

Donc $\exp(a) \geqslant 0$.
Or, on a vu que la fonction exp ne peut pas s'annuler (voir la démonstration de l'unicité du premier théorème, première partie).
Donc, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\exp(a) > 0$. □

Exercice 2
Étudier le signe des expressions suivantes.

1. $A(x) = 5 + \exp(3x)$.
2. $B(x) = (2 - x)\exp(1 + x)$.

Propriété
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $\square$

Propriété
Pour tous réels a et b,

1. $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
2. $\exp(a - b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
3. pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Démonstration
Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Avec la relation fonctionnelle, $\exp(-a) \times \exp(a) = \exp(-a + a) = \exp(0) = 1$.
   De plus, la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   Donc $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$.
2. On en déduit que $\exp(a - b) = \exp(a) \times \dfrac{1}{\exp(b)} = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
3. Admis en première générale (la démonstration se fait par récurrence). $\square$

II Nombre e et notation exponentielle

Définition
L'image de 1 par la fonction exponentielle se note e, c'est-à-dire $\exp(1) = \mathrm{e}$.

Remarque
$\mathrm{e} \approx 2.71828$. Il est appelé nombre d'Euler.
D'après la propriété ci-dessus, pour tout entier n, $\exp(n) = \exp(1 \times n) = [\exp(1)]^n = \mathrm{e}^n$.
On généralise cette écriture à tout réel x.

Définition (notation)
Pour tout x réel, on note e^x l'image de x par la fonction exponentielle : $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Avec la nouvelle notation, les propriétés déjà vues s'écrivent

Propriété

1. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est elle-même.
2. $\mathrm{e}^0 = 1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.
4. Pour tous réels a et b, et pour tout entier relatif n :
   (a) $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$.
   (b) $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$.
   (c) $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
   (d) $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$.

Théorème (équation et inéquation)

Pour tous réels a et b,

1. $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ équivaut à $a = b$.
2. $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ équivaut à $a < b$.

Démonstration

1. Si $a = b$, alors $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$.
   Réciproquement, si $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = 1$, soit $\mathrm{e}^{a-b} = 1$.
   Or, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\mathrm{e}^0 = 1$.
   Donc $a - b = 0$.
   En effet, si on avait $a - b < 0$, on aurait $\mathrm{e}^{a-b} < \mathrm{e}^0$, ce qui n'est pas.
   De même, si on avait $a - b > 0$, on aurait $\mathrm{e}^{a-b} > \mathrm{e}^0$, ce qui n'est pas.
   Donc $a - b = 0$, $a = b$.
2. Si $a < b$, alors, comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$.
   Réciproquement, supposons que $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$.
   Si on avait $a \geqslant b$, toujours via la croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on aurait $\mathrm{e}^a \geqslant \mathrm{e}^b$, contradiction.
   Donc $a < b$.

$\square$

Exercice 3

Application à la résolution d'équations et d'inéquations :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{2x+1} = \mathrm{e}^{3x-3}$.
2. Résoudre de même l'inéquation $\mathrm{e}^{(x^2)} < \mathrm{e}^4$.

Remarque

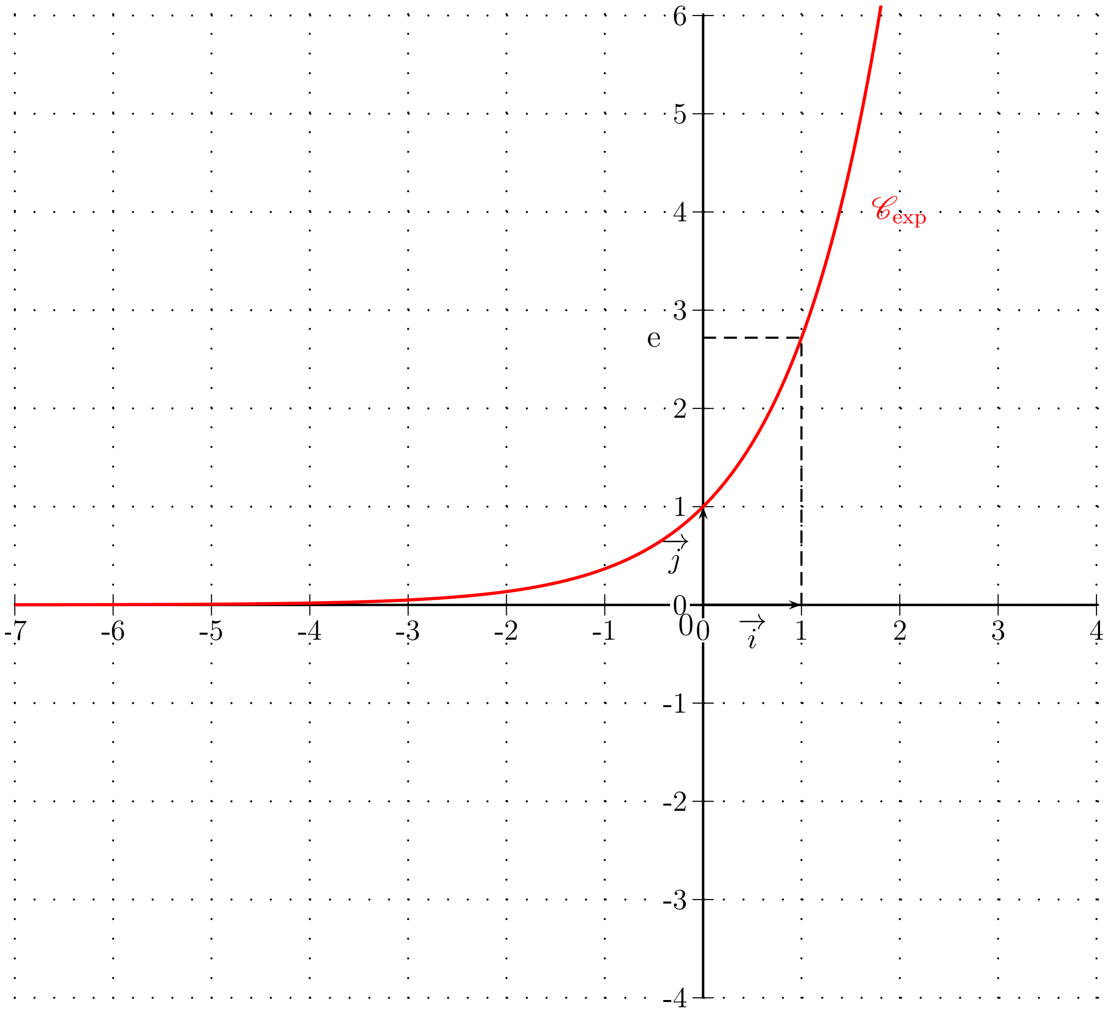
En particulier, comme $\mathrm{e}^0 = 1$, il vient :
$\mathrm{e}^x > 1$ ssi $x > 0$ et $\mathrm{e}^x < 1$ ssi $x < 0$.

III Étude de la fonction exponentielle

On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$.
La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'$		$+$	1	$+$	
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative
On rappelle que $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = \mathrm{e} \approx 2,718$.



IV Fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$, lien avec les suites géométriques

Propriété
Soient a et b deux réels, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a\mathrm{e}^{ax+b}$.

Démonstration
On utilise la propriété déjà vue sur la fontion f définie par $f(x) = g(ax+b)$ où g est une fonction dérivable. Ici, $g(x) = \mathrm{e}^{x}$.
$f'x) = a \times g'(ax+b) = a\mathrm{e}^{ax+b}$ car la dérivée de la fonction exponentielle est elle-même. □

Exercice 4
Dériver les fonctions.

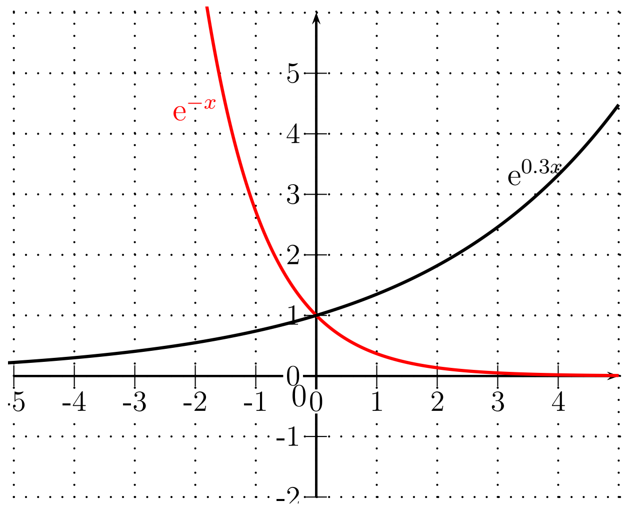
1. $A(x) = \mathrm{e}^{2-7x}$.
2. $B(x) = 5\mathrm{e}^{10x+\pi}$.

Étude des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$, $k \neq 0$.
Soient k un réel non nul, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = k\mathrm{e}^{kx}$.
Donc, si $k > 0$, alors $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Au contraire, si $k < 0$, alors $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$ et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété (fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$)
Si $k > 0$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $k < 0$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque
On a toujours $f(0) = 1$ (quel que soit k).

Représentation graphique pour $k = -1$ et $k = 0,3$



Propriété (lien avec les suites géométriques)
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite de terme général e^{na} est géométrique, de raison e^{a}.

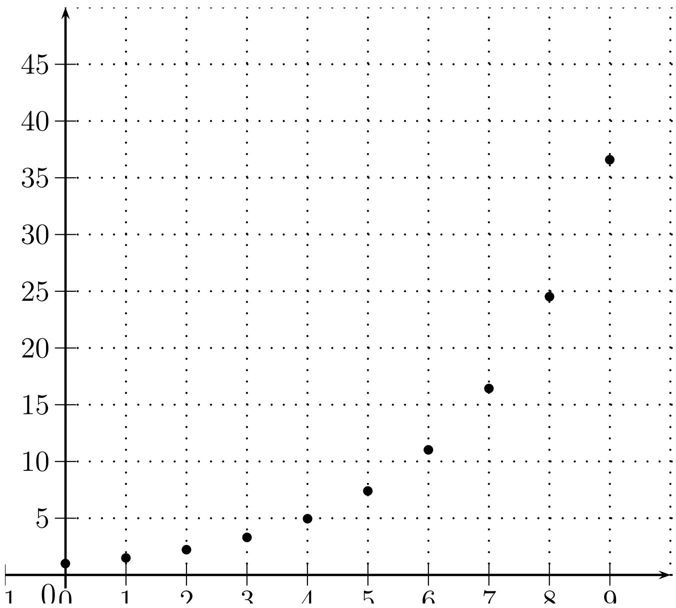
Démonstration
Soit $a \in \mathbb{R}$, posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{na}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na+a} = e^{na} \times e^a = e^a \times u_n$.
Donc (u_n) est la suite géométrique de raison $q = e^a$, et de premier terme $u_0 = e^0 = 1$. □

Remarque

1. La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points (alignés) situés sur une courbe de fonction affine.
2. La représentation graphique d'une suite géométrique est un nuage de points situés sur une courbe de fonction exponentielle.
   Lorsque $a < 0$, la raison $q = e^a$ vérifie $0 < e^a < 1$, et la suite géométrique (e^{na}) est strictement décroissante.
   Lorsque $a > 0$, on a $q = e^a > 1$ et la suite géométrique (e^{na}) est strictement croissante.

Illustration

Représentation graphique de la suite $(e^{0.4n})$.
La raison est $q = e^{0.4} \approx 1,4918 > 1$. La suite est strictement croissante.



Représentation graphique de la suite $(e^{-0.7n})$.
La raison est $q = e^{-0.7} \approx 0.4966$. Comme $0 < q < 1$, la suite est strictement décroissante.