BTS CRSA2. Correction du devoir n° 2

Exercice 1 (4 points)

1. Résoudre l'équation différentielle homogène suivante : $2y' + 5y = 0$.

   $y' + \dfrac{5}{2}y = 0$

   On pose $a(x) = \dfrac{5}{2}$, et $A(x) = \dfrac{5}{2}x$.

   $\boxed{\text{Les solutions sont les fonctions } f \text{ définies par } f(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.}$

2. En déduire la solution telle que $f(0) = -1$.

   $f(0) = -1$ ssi $k \times \mathrm{e}^0 = -1$ ssi $k = -1$

   $\boxed{\text{La solution vérifiant } f(0) = -1 \text{ est } f(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x}.}$

Exercice 2 (8 points)

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :

$$3y' - y = 6\mathrm{e}^{2x}.$$

1. Résoudre l'équation homogène (H) : $3y' - y = 0$.

   $y' - \dfrac{1}{3}y = 0.$

   $\boxed{\text{Les solutions sont les fonctions } f \text{ définies par } f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.}$

2. Déterminer une solution particulière de l'équation (E) sous la forme $g(x) = c \times \mathrm{e}^{2x}$, c étant une constante à déterminer.

   On pose $g(x) = c\mathrm{e}^{2x}$.

   Alors $g'(x) = 2c\mathrm{e}^{2x}$.

   Et g est solution de (E) ssi $3g'(x) - g(x) = 6\mathrm{e}^{2x}$

   $3(2c\mathrm{e}^{2x}) - c\mathrm{e}^{2x} = 6\mathrm{e}^{2x}$

   $5c\mathrm{e}^{2x} = 6\mathrm{e}^{2x}$

   D'où $5c = 6$ ssi $c = \dfrac{6}{5}$.

   $\boxed{\text{La fonction définie par } g(x) = \frac{6}{5}\mathrm{e}^{2x} \text{ est une solution de } (E).}$

3. Pour la suite, on admettra que la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{6}{5}\mathrm{e}^{2x}$ est solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E).

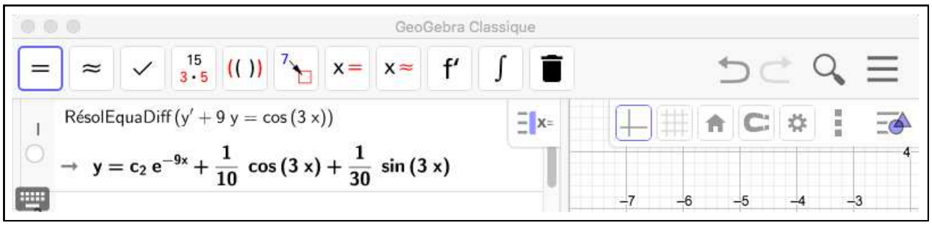
   $\boxed{\begin{array}{l}\text{Les solutions de } (E) \text{ sont les fonctions définies par} \\ f(x) = \frac{6}{5}\mathrm{e}^{2x} + k\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}, \text{ où } k \in \mathbb{R}.\end{array}}$

4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 3$.

   $f(0) = 3$ ssi $\dfrac{6}{5}\mathrm{e}^0 + k\mathrm{e}^0 = 3$ ssi $k = 3 - \dfrac{6}{5} = \dfrac{9}{5}$.

La solution vérifiant $f(0) = 3$ est la fonction f définie par
$f(x) = \frac{6}{5}\mathrm{e}^{2x} + \frac{9}{5}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}$.

Exercice 3 (2 points)
On donne une capture d'écran d'un logiciel de calcul formel.



1. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' + 9y = \cos(3x)$.
   Les solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{-9x} + \frac{1}{10}\cos(3x) + \frac{1}{30}\sin(3x)$, avec $k \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.
   $f(0) = 1$ ssi $k\mathrm{e}^0 + \frac{1}{10}\cos(0) + \frac{1}{30}\sin(0) = 1$ ssi $k + 0,1 + 0 = 1$ ssi $k = 0,9$.

La solution vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$ est
$f(x) = 0,9\mathrm{e}^{-9x} + \frac{1}{10}\cos(3x) + \frac{1}{30}\sin(3x)$.

Exercice 4 (4 points)
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -9 & -11 & 2 \\ 22 & 13 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Compléter en précisant les coefficients de la matrice A.
   $a_{1,2} = -11$
   $a_{2,3} = -3$
2. Calculer les matrices $A + B$, puis $3A$, et $3A - B$. On pourra donner le résultat sans justifier.
   $A + B = \begin{pmatrix} -8 & -11 & 0 \\ 24 & 18 & 6 \end{pmatrix}$, $3A = \begin{pmatrix} -27 & -33 & 6 \\ 66 & 39 & -9 \end{pmatrix}$,
   et $3A - B = \begin{pmatrix} -28 & -33 & 8 \\ 64 & 34 & -18 \end{pmatrix}$

Exercice 5 (2 points)
Soit A la matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 2}$ où $a_{i,j} = 3i - j^2$.
Écrire explicitement la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$