

Exercices sur les équations différentielles du 1^{er} ordre

Fiche n° 2

Exercice 6 (des équation homogènes)

Résoudre les équations différentielles suivantes dans lesquelles y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I .

1. $(H_1) : y' + 2xy = 0 ; I = \mathbb{R}$.
2. $(H_2) : 2y' - e^{2x}y = 0 ; I = \mathbb{R}$.
3. $(H_3) : t \times y' + y = 0 ; I =]0; +\infty[$.
4. $(H_4) : (1 + t)y' + y = 0 ; I =]-1; +\infty[$.
5. $(H_5) : (1 + 2t)y' + y = 0 ; I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

Exercice 7

On considère l'équation différentielle $(E) : 2\frac{dx}{dt} + tx = 0$ où x est une fonction dérivable de la variable t .

1. Résoudre (E) .
2. En déduire la solution vérifiant la condition $x(0) = 2$.

Exercice 8 (une équation complète)

On se propose de résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$.

1. Résoudre l'équation homogène $(H) : y' + y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E) .
3. En déduire les solutions de (E) .
4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 3$.

Exercice 9 (variante)

On se propose de résoudre sur $] -1; +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) : (1 + x)\frac{dy}{dx} - 2y = \ln(1 + x).$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E) .
2. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}$ est une solution de (E) .
3. En déduire les solutions de (E) .
4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$.

Exercice 10 (coefficients constants, avec second membre)

La modélisation d'un phénomène physique conduit à l'équation différentielle $(E) : 2y' + y = 12$, où y est une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur \mathbb{R} .

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : 2y' + y = 0$.
2. Déterminer une fonction constante g solution de l'équation différentielle (E) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
4. Déterminer la solution F de (E) vérifiant $F(0) = 0$.

Exercice 11 (variante)

On considère l'équation $(E) : 2x' + x = 2$, où x est une fonction de la variable t , définie et dérivable sur \mathbb{R} .

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Déterminer une fonction constante g solution de l'équation différentielle (E) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
4. Déterminer la solution de (E) vérifiant $x(0) = 1$.

Exercice 12

Un réservoir contient 1 000L d'eau douce dont la salinité est de $0,12 \text{ g.L}^{-1}$.

À la suite d'un regrettable accident, de l'eau de mer pénètre dans ce réservoir à raison de 10 litres par minute.

On note s la salinité de l'eau du réservoir. s est une fonction du temps t , exprimé en minutes.

On admet que s est solution de l'équation différentielle $(E) : s'(t) + 0,01s(t) = 0,39$.

1. Résoudre l'équation $(H) : s'(t) + 0,01s(t) = 0$.
2. Donner une fonction constante f solution de l'équation différentielle (E) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
4. Montrer que $s(t) = 39 - 38,88e^{-0,01t}$.
5. Déterminer la salinité de l'eau 60 minutes après le début de l'incident. Arrondir à 10^{-2} .